

平成 21 年度 東北大学 2 次試験前期日程 (数学問題)100 分
文系 (文, 教育, 法, 経済, 医 (保健 [看護]))

問題 1 2 3 4

- 1 すべての実数 x に対して不等式

$$2^{2x+2} + 2^x a + 1 - a > 0$$

が成り立つような実数 a の範囲を求めよ.

- 2 辺 AB の長さが 1, $\angle A$ が直角となる三角形 $\triangle ABC$ がある. 辺 BC 上を点 C から点 B まで動く点 D を考え, 内積 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ を t とおく. 以下の問いに答えよ.

(1) t の動く範囲を求めよ.

(2) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA}$ が成り立つとき, t の値を求めよ.

- 3 袋の中に青玉が 7 個, 赤玉が 3 個入っている. 袋から 1 回につき 1 個ずつ玉を取り出す. 一度取り出した玉は袋に戻さないとして, 以下の問いに答えよ.

(1) 4 回目に初めて赤玉が取り出される確率を求めよ.

(2) 8 回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出されている確率を求めよ.

(3) 赤玉がちょうど 8 回目ですべて取り出される確率を求めよ.

- 4 不等式 $2y > x + 1 + 3|x - 1|$ が表す座標平面上の領域を D とする. 実数 a に対して, 放物線 C を $y = x^2 - 2ax + a^2 + a + 2$ で定める. このとき, C 上の点がすべて D の点となるような a の範囲を求めよ.

解答例

- 1 $4(2^x)^2 + 2^x a + 1 - a > 0$ であるから, $t = 2^x$ とおくと, $t > 0$ において次式を満たす a の値の範囲を求めればよい.

$$4t^2 + at + 1 - a > 0$$

$$f(t) = 4t^2 + at + 1 - a \text{ とおくと}$$

$$f(t) = 4\left(t + \frac{a}{8}\right)^2 - \frac{a^2}{16} - a + 1$$

(i) $-\frac{a}{8} \leq 0$, すなわち, $a \geq 0$ のとき

$$f(0) = 1 - a \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 \leq a \leq 1$$

(ii) $0 < -\frac{a}{8}$, すなわち, $a < 0$ のとき

$$f\left(-\frac{a}{8}\right) = -\frac{a^2}{16} - a + 1 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 + 16a - 16 < 0$$

$$a < 0 \text{ に注意して, これを解くと} \quad -8 - 4\sqrt{5} < a < 0$$

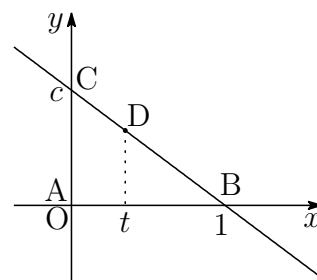
(i), (ii) より $-8 - 4\sqrt{5} < a \leq 1$ ■

- 2 (1) 座標平面上に A を原点 O とし, 点 B(1, 0), 点 C(0, c) をとる (c は正の定数). 点 D の座標を (d_1, d_2) とすると

$$\overrightarrow{AD} = (d_1, d_2), \quad \overrightarrow{AB} = (1, 0)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = t \text{ より} \quad d_1 = t$$

$$\text{点 D は辺 BC 上にあるから} \quad 0 \leq t \leq 1$$



- (2) 直線 BC の方程式は $y = -cx + c$ (1) の結果から 点 D($t, -ct + c$)

$$\overrightarrow{AD} = (t, -ct + c), \quad \overrightarrow{AC} = (0, c), \quad \overrightarrow{CD} = (t, -ct), \quad \overrightarrow{CA} = (0, -c)$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA} \text{ より}$$

$$t \cdot 0 + (-ct + c)c = t \cdot 0 + (-ct)(-c) \quad \text{ゆえに} \quad -c^2t + c^2 = c^2t$$

$$c \neq 0 \text{ であるから} \quad -t + 1 = t \quad \text{よって} \quad t = \frac{1}{2} \quad \text{■}$$

3 (1) 求める確率は $\frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{8}$

別解 青玉 7 個，赤玉 3 個の計 10 個を取り出す場合の総数は (10 個の玉を取り出して一列に並べる場合の総数)

$$\frac{10!}{7!3!} = 120 \text{ (通り)}$$

取り出した玉を一列に並べたとき，1 番目から 4 番目までが青青青赤で，5 番目以降に青 4 個，赤 2 個が並ぶ場合の総数は

青	青	青	赤						
---	---	---	---	--	--	--	--	--	--

$$\frac{6!}{4!2!} = 15 \text{ (通り)} \quad \text{求める確率は} \quad \frac{15}{120} = \frac{1}{8}$$

(2) 取り出した玉を一列に並べたとき，9 番目と 10 番目が青で，1 番目から 8 番目までに青 5 個と赤 3 個を並べる場合の総数は

								青	青
--	--	--	--	--	--	--	--	---	---

$$\frac{8!}{5!3!} = 56 \text{ (通り)} \quad \text{求める確率は} \quad \frac{56}{120} = \frac{7}{15}$$

(3) 取り出した玉を一列に並べたとき，8 番目が赤，9 番目と 10 番目が青で，1 番目から 7 番目までに青 5 個と赤 2 個を並べる場合の総数は

							赤	青	青
--	--	--	--	--	--	--	---	---	---

$$\frac{7!}{5!2!} = 21 \text{ (通り)} \quad \text{求める確率は} \quad \frac{21}{120} = \frac{7}{40}$$



4 $D : 2y > x + 1 + 3|x - 1|$ より

$$y > \frac{x + 1 + 3|x - 1|}{2} = \begin{cases} -x + 2 & (x \leq 1) \\ 2x - 1 & (1 \leq x) \end{cases}$$

$C : y = x^2 - 2ax + a^2 + a + 2$ 上の点~~が~~すべて D に含まれるとき、次の場合分けを行う。

[I] $x \leq 1$ のとき

$$x^2 - 2ax + a^2 + a + 2 > -x + 2$$

$$\text{ゆえに} \quad x^2 - (2a - 1)x + a^2 + a > 0$$

$$f(x) = x^2 - (2a - 1)x + a^2 + a \text{ とおくと}$$

$$f(x) = \left(x - \frac{2a - 1}{2}\right)^2 + 2a - \frac{1}{4}$$

$$(i) \quad \frac{2a - 1}{2} \leq 1, \text{ すなわち, } a \leq \frac{3}{2} \text{ のとき}$$

$$2a - \frac{1}{4} > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{8} < a \leq \frac{3}{2}$$

$$(ii) \quad 1 \leq \frac{2a - 1}{2}, \text{ すなわち, } \frac{3}{2} \leq a \text{ のとき}$$

$$f(1) = a^2 - a + 2 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$$

$$\text{このとき, 常に成立するから} \quad \frac{3}{2} \leq a$$

$$(i), (ii) \text{ より, } x \leq 1 \text{ において満たす条件は } \frac{1}{8} < a$$

[II] $1 \leq x$ のとき

$$x^2 - 2ax + a^2 + a + 2 > 2x - 1$$

ゆえに $x^2 - 2(a+1)x + a^2 + a + 3 > 0$

$g(x) = x^2 - 2(a+1)x + a^2 + a + 3$ とおくと

$$g(x) = (x - a - 1)^2 - a + 2$$

(i) $a+1 \leq 1$, すなわち, $a \leq 0$ のとき

$$g(1) = a^2 - a + 2 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$$

このとき, 常に成立するから $a \leq 0$

(ii) $1 \leq a+1$, すなわち, $0 \leq a$ のとき

$$-a + 2 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad 0 \leq a < 2$$

(i),(ii) より, $1 \leq x$ において満たす条件は $a < 2$

よって, [I], [II] を満たす a の値の範囲は $\frac{1}{8} < a < 2$

