

平成 20 年度 東北大学 2 次試験前期日程 (数学問題)100 分
文系 (文, 教育, 法, 経済, 医 (保健 [看護]))

問題 1 2 3 4

1 a を実数とし,

$$f(x) = x^3 + (2a - 4)x^2 + (a^2 - 4a + 4)x$$

とおく. 方程式 $f(x) = 0$ が 2 つの異なる実数解をもつとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) a の値の範囲を求めよ.
- (2) 関数 $y = f(x)$ の極値を求めよ.
- (3) a が (1) で求めた範囲を動くとき, $y = f(x)$ の極大値をあたえる x について, 点 $(x, f(x))$ が xy 平面上にえがく図形を図示せよ.

2 a, b, c, d, e を実数とする. 多項式

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

が次の条件 (i), (ii), (iii) をすべてみたすとき, a, b, c, d, e の値を求めよ.

- (i) $x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$
- (ii) $f(1 - x) = f(x)$
- (iii) $f(1) = 1$

3 平面上の $\triangle OA_1A_2$ は $\angle OA_2A_1 = 90^\circ$, $OA_1 = 1$, $OA_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ をみたすとする. A_2 から OA_1 へ垂線をおろし, 交点を A_3 とする. A_3 から OA_2 へ垂線をおろし, 交点を A_4 とする. 以下同様に, $k = 4, 5, \dots$ について, A_k から OA_{k-1} へ垂線をおろし, 交点を A_{k+1} として, 順番に $A_5, A_6, \dots$ を定める. 以下の問いに答えよ.

- (1) $A_k A_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots$) を求めよ.
- (2) $\vec{h}_k = \overrightarrow{A_k A_{k+1}}$ とおくとき, 自然数 n に対して $\sum_{k=1}^n \vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1}$ を求めよ. ただし, $\vec{h}_k \cdot \vec{h}_{k+1}$ は $\vec{h}_k$ と $\vec{h}_{k+1}$ の内積を表す.

4 点 P が次のルール (i), (ii) に従って数直線上を移動するものとする.

- (i) 1, 2, 3, 4, 5, 6 の目が同じ割合で出るサイコロを振り, 出た目の数を k とする. P の座標 a について, $a > 0$ ならば座標 $a - k$ の点へ移動し, $a < 0$ ならば座標 $a + k$ の点へ移動する.
- (ii) 原点に移動したら終了し, そうでなければ (i) を繰り返す.

このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) P の座標が 1, 2, ..., 6 のいずれかであるとき, ちょうど 2 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ.
- (2) P の座標が 1, 2, ..., 6 のいずれかであるとき, ちょうど 3 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ.
- (3) P の座標が 7 であるとき, ちょうど n 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ.

解答例

- 1 (1) $f(x) = x^3 + (2a - 4)x^2 + (a^2 - 4a + 4)x$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= x\{x^2 + 2(a - 2)x + (a - 2)^2\} \\ &= x(x + a - 2)^2 \end{aligned}$$

方程式 $f(x) = 0$ の解は $x = 0, 2 - a$ (2重解)

方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつから

$$2 - a \neq 0 \quad \text{よって} \quad a \neq 2$$

$$\begin{aligned} (2) \quad f'(x) &= 3x^2 + 4(a - 2)x + (a - 2)^2 \\ &= (3x + a - 2)(x + a - 2) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = \frac{2 - a}{3}, 2 - a$$

- (i) $\frac{2 - a}{3} < 2 - a$, すなわち, $a < 2$ のとき

x	$\cdots$	$\frac{2-a}{3}$	$\cdots$	$2-a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

したがって 極大値 $f\left(\frac{2-a}{3}\right) = \frac{4}{27}(2-a)^3$, 極小値 $f(2-a) = 0$

- (ii) $2 - a < \frac{2 - a}{3}$, すなわち, $2 < a$ のとき

x	$\cdots$	$2-a$	$\cdots$	$\frac{2-a}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

したがって 極大値 $f(2-a) = 0$, 極小値 $f\left(\frac{2-a}{3}\right) = \frac{4}{27}(2-a)^3$

- (3) 極大値を与える点を (x, y) とする.

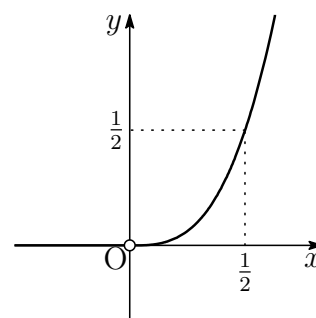
- (2)(i) より, $2 - a > 0$ のとき

$$x = \frac{2 - a}{3}, \quad y = 4\left(\frac{2 - a}{3}\right)^3$$

- (2)(ii) より, $2 - a < 0$ のとき

$$x = 2 - a, \quad y = 0$$

$$\text{よって} \quad y = \begin{cases} 4x^3 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$



したがって, 求める図形は, 右の図のようになる. ■

2 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ より

$$\begin{aligned} x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) &= x^4 \left(\frac{a}{x^4} + \frac{b}{x^3} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x} + e \right) \\ &= a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \end{aligned}$$

条件 (i) より, 同じ次数の項の係数を比較して $a = e, b = d$

条件 (ii), (iii) より $f(1) = f(0) = 1$ であるから $a = e = 1$

$f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + bx + 1 \cdots \textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned} f(1-x) &= (1-x)^4 + b(1-x)^3 + c(1-x)^2 + b(1-x) + 1 \\ &= x^4 + (-b-4)x^3 + (3b+c+6)x^2 \\ &\quad + (-4b-2c-4)x + (2b+c+2) \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ の同じ次数の項の係数を比較して

$$(*) \begin{cases} b = -b - 4 \\ c = 3b + c + 6 \\ b = -4b - 2c - 4 \\ 1 = 2b + c + 2 \end{cases}$$

(*) の第 1, 第 4 式から $b = -2, c = 3$ これらは第 2, 第 3 式を満たす.

よって $a = 1, b = -2, c = 3, d = -2, e = 1$ ■

4 P の座標が 0 以外の $-6 \sim 6$ にあるとき、次回終了する確率は $\frac{1}{6}$

次回終了しない確率は、その余事象の確率であるから $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

(1) P の座標が 1 回で、原点に移動する確率は $\frac{1}{6}$ 、原点に移動しない確率は $\frac{5}{6}$ である。求める確率は、2 回目に原点に移動する確率であるから

$$\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$$

(2) (1) と同様に、3 回目に原点に移動する確率であるから

$$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$$

(3) P の座標が 1, 2, ..., 6 にあるとき、 m 回目に原点に移動する確率を p_m とおくと

$$p_m = \overbrace{\frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{5}{6}}^{m-1 \text{ 個}} \times \frac{1}{6} = \frac{5^{m-1}}{6^m}$$

P の座標が 7 であるとき、1 回サイコロを振ると、P の座標は 1, 2, ..., 6 のいずれかであり、その後、 $n-1$ 回サイコロを振って原点に移る確率であるから ($n \geq 2$)

$$p_{n-1} = \frac{5^{n-2}}{6^{n-1}}$$

よって、求める確率は

$$n = 1 \text{ のとき } 0, \quad n \geq 2 \text{ のとき } \frac{5^{n-2}}{6^{n-1}}$$

