

平成19年度 東北大学2次試験前期日程(数学問題)100分
文系(文, 教育, 法, 経済, 医(保健[看護]))

問題 1 2 3 4

1 n を2以上の自然数とし, 整式 x^n を $x^2 - 6x - 12$ で割った余りを $a_n x + b_n$ とする.

- (1) a_2, b_2 を求めよ.
- (2) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ.
- (3) 各 n に対して, a_n と b_n の公約数で素数となるものをすべて求めよ.

2 $\angle C$ を直角とする直角三角形 ABC に対して, $\angle A$ の二等分線と線分 BC の交点を D とする. また, 線分 AD, DC, CA の長さはそれぞれ5, 3, 4とする. $\angle A = \theta$ とおくとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $\sin \theta$ を求めよ.
- (2) $\theta < \frac{5}{12}\pi$ を示せ. ただし, $\sqrt{2} = 1.414\cdots$, $\sqrt{3} = 1.732\cdots$ を用いてもよい.

3 xy 平面の3点 $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(1, \sqrt{3})$ を頂点とする $\triangle ABC$ に対して以下の問いに答えよ.

- (1) $0 \leq a \leq \sqrt{3}$ を満たす定数 a に対して, 点 $P(x, a)$ が $\triangle ABC$ に含まれるための x の範囲を求めよ.
- (2) (1) の定数 a に対して, (1) で求められた範囲を x が動くとき, $AP^2 + BP^2 + CP^2$ の最小値と, そのときの x の値を求めよ.
- (3) 点 $P(x, y)$ が $\triangle ABC$ に含まれるとき, $AP^2 + BP^2 + CP^2$ の最小値と, そのときの点 P の座標 (x, y) を求めよ.

4 関数 $f(x)$ が

$$f(x) = x^2 - x \int_0^2 |f(t)| dt$$

を満たしているとする. このとき, $f(x)$ を求めよ.

解答例

1 (1) $x^2 = (x^2 - 6x - 12) \cdot 1 + 6x + 12$ より $a_2 = 6, b_2 = 12$

(2) x^n を $x^2 - 6x - 12$ で割った商を $Q_n(x)$ とすると

$$x^n = (x^2 - 6x - 12)Q_n(x) + a_nx + b_n$$

したがって

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= (x^2 - 6x - 12)xQ_n(x) + a_nx^2 + b_nx \\ &= (x^2 - 6x - 12)xQ_n(x) + a_n(x^2 - 6x - 12) + a_n(6x + 12) + b_nx \\ &= (x^2 - 6x - 12)\{xQ_n(x) + a_n\} + (6a_n + b_n)x + 12a_n \end{aligned}$$

よって $a_{n+1} = 6a_n + b_n, b_{n+1} = 12a_n$

(3) a_2, b_2 の公約数で素数であるものは 2, 3

$a_k \equiv 0, b_k \equiv 0 \pmod{p}$ のとき, (2) の結果から

$$a_{k+1} \equiv 0, b_{k+1} \equiv 0 \pmod{p}$$

これと (1) の結果から, すべての自然数 n , 素数 $p(p = 2, 3)$ について

$$a_n \equiv 0, b_n \equiv 0 \pmod{p}$$

次に, a_n, b_n が, $n = l + 1$ のときに初めて, 2, 3 以外の素数 q を公約数にもつ, すなわち

$$a_{l+1} \equiv 0, b_{l+1} \equiv 0 \pmod{q}$$

と仮定すると, (2) の結果から

$$(*) \quad 6a_l + b_l \equiv 0, \quad 12a_l \equiv 0 \pmod{q}$$

(*) の第 2 式から $a_l \equiv 0 \pmod{q}$

これを (*) の第 1 式に代入すると $b_l \equiv 0 \pmod{q}$

$n = l$ のときも, a_n, b_n が素数 q を約数にもち, 矛盾を生じる.

したがって, a_n, b_n は 2, 3 以外の素数を公約数にもたない.

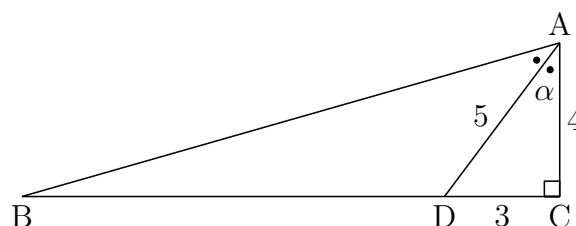
よって, a_n, b_n の公約数は, すべての n について **2, 3** ■

2 (1) $\theta = 2\alpha$ とおくと、右の図から

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

したがって

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &= 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25} \end{aligned}$$



$$(2) \cos \theta = \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$$

$$\text{これと (1) の結果より} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{24}{7}$$

$$\text{また} \quad \tan \frac{5}{12}\pi = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\tan \frac{5}{12}\pi - \tan \theta = 2 + \sqrt{3} - \frac{24}{7} = \frac{7\sqrt{3} - 10}{7} = \frac{\sqrt{147} - \sqrt{100}}{7} > 0$$

$$\text{したがって} \quad \tan \theta < \tan \frac{5}{12}\pi \quad \text{よって} \quad \theta < \frac{5}{12}\pi$$

補足 $\sin \theta < \sin \frac{5}{12}\pi$ を示してもよいが、 θ が鋭角であることに注意する必要がある。またその大小の評価も僅差となる。実際

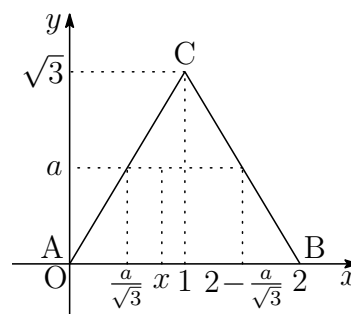
$$\begin{aligned} \sin \frac{5}{12}\pi &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4} \\ &> \frac{1.41(1.73 + 1)}{4} = 0.962325 \\ &> 0.96 = \frac{24}{25} = \sin \theta \end{aligned}$$

■

- 3** (1) 直線 AC : $y = \sqrt{3}x$,
 直線 BC : $y = -\sqrt{3}(x - 2)$
 直線 $y = a$ ($0 \leq a \leq \sqrt{3}$) と 2 直線 AC,
 BC との交点の x 座標は, それぞれ

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad x = 2 - \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\text{よって } \frac{a}{\sqrt{3}} \leq x \leq 2 - \frac{a}{\sqrt{3}}$$



- (2) A(0, 0), B(2, 0), C(1, $\sqrt{3}$), P(x, a) より

$$\begin{aligned} AP^2 + BP^2 + CP^2 &= x^2 + a^2 + (x - 2)^2 + a^2 + (x - 1)^2 + (a - \sqrt{3})^2 \\ &= 3x^2 - 6x + 3a^2 - 2\sqrt{3}a + 8 \\ &= 3(x - 1)^2 + 3a^2 - 2\sqrt{3}a + 5 \end{aligned}$$

$$0 \leq a \leq \sqrt{3} \text{ より } \frac{a}{\sqrt{3}} \leq 1 \leq 2 - \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\text{よって } x = 1 \text{ のとき, 最小値 } 3a^2 - 2\sqrt{3}a + 5$$

- (3) (2) の結果から, $m = 3a^2 - 2\sqrt{3}a + 5$ とすると

$$m = 3 \left(a - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 4$$

$$\text{よって, } P \left(1, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \text{ で最小値 } 4 \text{ をとる.}$$



$$\boxed{4} \quad f(x) = x^2 - x \int_0^2 |f(t)| dt$$

$$k = \int_0^2 |f(t)| dt \text{ とおくと } (k \geq 0) \quad f(x) = x(x - k)$$

(i) $0 \leq k < 2$ のとき

$$\begin{aligned} k &= \int_0^2 |f(t)| dt = \int_0^2 |t(t - k)| dt \\ &= \int_0^k t(k - t) dt + \int_k^2 t(t - k) dt \\ &= \frac{1}{6}k^3 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{kt^2}{2} \right]_k^2 = \frac{k^3}{3} - 2k + \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\text{整理すると } k^3 - 9k + 8 = 0 \quad \text{ゆえに } (k - 1)(k^2 + k - 8) = 0$$

$$\text{これを解くと } k = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2} \quad 0 < k < 2 \text{ であるから } k = 1$$

(ii) $k \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} k &= \int_0^2 |f(t)| dt = \int_0^2 |t(t - k)| dt = \int_0^2 t(k - t) dt \\ &= \left[\frac{kt^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_0^2 = 2k - \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$k \geq 2 \text{ に注意して, これを解くと } k = \frac{8}{3}$$

$$(i), (ii) \text{ より } f(x) = x^2 - x, \quad x^2 - \frac{8}{3}x$$

