

平成18年度 東北大学2次試験前期日程(数学問題)100分
文系(文, 教育, 法, 経済, 医(保健[看護]))

問題 1 2 3 4

- 1 定数 a, b, c, p, q を整数とし, 次の x と y の三つの多項式

$$P = (x + a)^2 - 9c^2(y + b)^2$$

$$Q = (x + 11)^2 + 13(x + 11)y + 36y^2$$

$$R = x^2 + (p + 2q)xy + 2pqy^2 + 4x + (11p - 14q)y - 77$$

を考える. 以下の問に答えよ.

- (1) 多項式 P, Q, R を因数分解せよ.
 - (2) P と Q, Q と R, R と P は, それぞれ x, y の1次式を共通因数としてもっているものとする. このときの整数 a, b, c, p, q を求めよ.
- 2 袋の中に1から7までの番号が書かれた球が7個入っている. ここから同時に3個の球を取り出す. 取り出された3個の球に書かれている数を大きいものから順に X, Y, Z とする. X, Y, Z それぞれの期待値を求めよ. ただし, 7個の球にはそれぞれ互いに異なる1個の番号が書かれていて, どの球も取り出される確率は皆等しいものとする.

- 3 図-1 のような $AB = BC = CD = DA = AC = 1$ である四角形 $ABCD$ を考える. この四角形 $ABCD$ を AC で折り, 図-2 のように点 B, C, D が平面 P にのるように置く. 図-2 に現れる辺 CB と辺 CD とがなす角を α , $\alpha = \angle BCD$, とし $0^\circ < \alpha < 120^\circ$ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 図-2 において, A から平面 P に下ろした垂線が P と交わる点を H とする. $\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}$ と α とで表せ.
- (2) $\overrightarrow{AH}$ の長さを α を用いて表せ.
- (3) H が図-2 における $\triangle BCD$ の重心となるときの角度 α を求めよ.

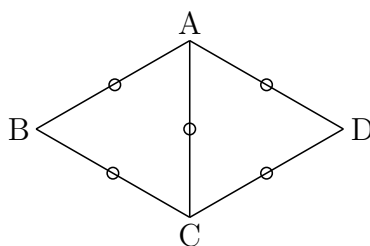


図-1

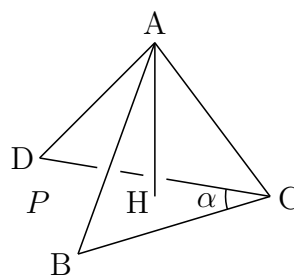


図-2

4 連立不等式 $1 \leq x \leq 2$, $y \leq 0$ が表す xy 平面内の領域を D とする. また, a を定数とし, 不等式 $y \geq x^2 - 3ax + 2a^2$ が表す xy 平面内の領域を E とする. 以下の問に答えよ.

- (1) D と E とが共有点をもつような実数 a の範囲を求めよ.
- (2) (1) の範囲の a に対して, D と E との共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ.
- (3) (2) で求めた $S(a)$ の最大値を求めよ.

解答例

$$\begin{aligned}
 \boxed{1} \quad (1) \quad P &= (x+a)^2 - 9c^2(y+b)^2 \\
 &= (x+a)^2 - \{3c(y+b)\}^2 \\
 &= \{(x+a) + 3c(y+b)\}\{(x+a) - 3c(y+b)\} \\
 &= (x + 3cy + a + 3bc)(x - 3cy + a - 3bc)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q &= (x+11)^2 + 13(x+11)y + 36y^2 \\
 &= \{(x+11) + 4y\}\{(x+11) + 9y\} \\
 &= (x + 4y + 11)(x + 9y + 11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R &= x^2 + (p+2q)xy + 2pqy^2 + 4x + (11p-14q)y - 77 \\
 &= (x+py)(x+2qy) + 4x + (11p-14q)y - 7 \cdot 11 \\
 &= (x + py - 7)(x + 2qy + 11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 x+py & \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} & \begin{array}{l} -7 \longrightarrow -7x - 14qy \\ 11 \longrightarrow \frac{11x + 11py}{4x + (11p - 14q)y} (+) \end{array} \\
 x+2qy & &
 \end{array}$$

(2) P と Q の y の係数を比較すると、これらの共通因数は

$$x + 9y + 11$$

$$\text{ゆえに } c = \pm 3, \quad P = (x + 9y + a + 9b)(x - 9y + a - 9b)$$

$$\text{定数項を比較すると } a + 9b = 11 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{したがって } P = (x + 9y + 11)(x - 9y + a - 9b) \quad \cdots (*)$$

Q と R の y の係数および定数項を比較すると、これらの共通因数は

$$x + 4y + 11$$

$$\text{ゆえに } 2q = 4 \quad \text{よって } q = 2$$

$$R = (x + py - 7)(x + 4y + 11) \cdots (**)$$

$(*)$, $(**)$ の共通因数に注目すると

$$p = -9, \quad a - 9b = -7 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を解いて } a = 2, \quad b = 1$$

$$\text{よって } a = 2, \quad b = 1, \quad c = \pm 3, \quad p = -9, \quad q = 2$$



2 X, Y, Z のそれぞれの確率は

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \frac{{}_{k-1}C_2}{{}_7C_3} & (3 \leq k \leq 7) \\ P(Y = k) &= \frac{(k-1)(7-k)}{{}_7C_3} & (2 \leq k \leq 6) \\ P(Z = k) &= \frac{{}_{7-k}C_2}{{}_7C_3} & (1 \leq k \leq 5) \end{aligned}$$

X, Y, Z のそれぞれの期待値は

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=3}^7 kP(X = k) = \frac{1}{35} \sum_{k=3}^7 k \cdot {}_{k-1}C_2 \\ &= \frac{1}{35}(3 + 12 + 30 + 60 + 105) = \mathbf{6}, \\ E(Y) &= \sum_{k=2}^6 kP(Y = k) = \frac{1}{35} \sum_{k=2}^6 k(k-1)(7-k) \\ &= \frac{1}{35}(10 + 24 + 36 + 40 + 30) = \mathbf{4}, \\ E(Z) &= \sum_{k=1}^5 kP(Z = k) = \frac{1}{35} \sum_{k=1}^5 k \cdot {}_{7-k}C_2 \\ &= \frac{1}{35}(15 + 20 + 18 + 12 + 5) = \mathbf{2} \end{aligned}$$

■

3 (1) $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CH} = x\vec{b} + y\vec{d}$ とおくと

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{CH} - \overrightarrow{CA} = x\vec{b} + y\vec{d} - \vec{a} \quad \dots \textcircled{1}$$

$\vec{b} \perp \overrightarrow{AH}$, $\vec{d} \perp \overrightarrow{AH}$ であるから, $\vec{b} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$, $\vec{d} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$ より

$$\vec{b} \cdot (x\vec{b} + y\vec{d} - \vec{a}) = 0, \quad \vec{d} \cdot (x\vec{b} + y\vec{d} - \vec{a}) = 0$$

$$|\vec{b}| = |\vec{d}| = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{d} = 1 \cdot 1 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \vec{b} \cdot \vec{d} = 1 \cdot 1 \cos \alpha = \cos \alpha \text{ より}$$

$$x + y \cos \alpha - \frac{1}{2} = 0, \quad x \cos \alpha + y - \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{これを解いて} \quad x = y = \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } \overrightarrow{AH} = \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) - \overrightarrow{CA}$$

別解 $(\vec{b} + \vec{d}) \cdot (\vec{b} - \vec{d}) = |\vec{b}|^2 - |\vec{d}|^2 = 0$ より, 直交する単位ベクトルを

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{b} + \vec{d}}{|\vec{b} + \vec{d}|}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{b} - \vec{d}}{|\vec{b} - \vec{d}|}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HA} &= \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 - (\vec{a} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2 \\ &= \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{d})}{|\vec{b} + \vec{d}|^2} (\vec{b} + \vec{d}) + \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{d})}{|\vec{b} - \vec{d}|^2} (\vec{b} - \vec{d}) \end{aligned}$$

$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{d}) = 1$, $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{d}) = 0$, $|\vec{b} + \vec{d}|^2 = 2(1 + \cos \alpha)$ であるから

$$\overrightarrow{HA} = \vec{a} - \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)}(\vec{b} + \vec{d})$$

$$\text{よって } \overrightarrow{AH} = \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) - \overrightarrow{CA}$$

(2) $\overrightarrow{AH} = x(\vec{b} + \vec{d}) - \vec{a}$, $|\vec{b} + \vec{d}|^2 = \frac{1}{x}$, $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{d}) = 1$ に注意して

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AH}|^2 &= x^2 |\vec{b} + \vec{d}|^2 - 2x \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{d}) + |\vec{a}|^2 \\ &= 1 - x = 1 - \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)} = \frac{1 + 2 \cos \alpha}{2(1 + \cos \alpha)} \end{aligned}$$

$$\text{よって } |\overrightarrow{AH}| = \sqrt{\frac{1 + 2 \cos \alpha}{2(1 + \cos \alpha)}}$$

別解 (1) の結果から $\overrightarrow{CH} = \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2(1 + \cos \alpha)}$

$|\vec{b} + \vec{d}|^2 = 2(1 + \cos \alpha)$ であるから

$$|\overrightarrow{CH}|^2 = \frac{|\vec{b} + \vec{d}|^2}{4(1 + \cos \alpha)^2} = \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)}$$

よって $|\overrightarrow{AH}| = \sqrt{|\overrightarrow{CA}|^2 - |\overrightarrow{CH}|^2}$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)}} = \sqrt{\frac{1 + 2 \cos \alpha}{2(1 + \cos \alpha)}}$$

(3) $\overrightarrow{CH} = \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2(1 + \cos \alpha)}$

H が図-2 の $\triangle BCD$ の重心であるとき $\overrightarrow{CH} = \frac{\vec{b} + \vec{d}}{3}$

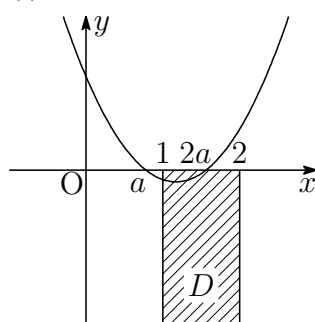
したがって $2(1 + \cos \alpha) = 3$ ゆえに $\cos \alpha = \frac{1}{2}$

よって $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ■

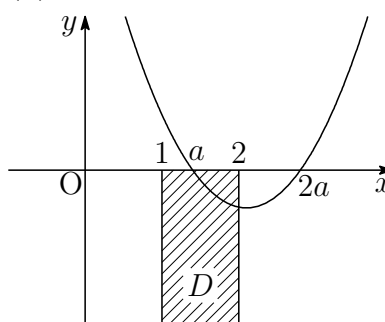
4 (1) $y \geq (x - a)(x - 2a)$ から, 条件を満たす a の値の範囲は次の場合である.

(i) $1 \leq 2a \leq 2$, すなわち, $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ (ii) $1 \leq a \leq 2$

(i) $1 \leq 2a \leq 2$



(ii) $1 \leq a \leq 2$



(i) または (ii) の範囲より $\frac{1}{2} \leq a \leq 2$

(2) (i) $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S(a) &= - \int_1^{2a} (x^2 - 3ax + 2a^2) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3a}{2}x^2 - 2a^2x \right]_1^{2a} \\ &= -\frac{2}{3}a^3 + 2a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(ii) $1 \leq a \leq 2$ のとき

$$\begin{aligned} S(a) &= - \int_a^2 (x^2 - 3ax + 2a^2) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3a}{2}x^2 - 2a^2x \right]_a^2 \\ &= \frac{5}{6}a^3 - 4a^2 + 6a - \frac{8}{3} \end{aligned}$$

(3) (i) $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S'(a) &= -2a^2 + 4a - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(4a^2 - 8a + 3) \\ &= -\frac{1}{2}(2a - 1)(2a - 3) \end{aligned}$$

(ii) $1 \leq a \leq 2$ のとき

$$\begin{aligned} S'(a) &= \frac{5}{2}a^2 - 8a + 6 = \frac{1}{2}(5a^2 - 16a + 12) \\ &= \frac{1}{2}(a - 2)(5a - 6) \end{aligned}$$

(i), (ii) より, $S(a)$ の増減表は次のようになる.

a	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{6}{5}$	$\cdots$	2
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって, 求める最大値は $S\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{16}{75}$

