

平成 25 年度 大阪大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 150 分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部 数 I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5

1 三角関数の極限に関する公式

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

を示すことにより, $\sin x$ の導関数が $\cos x$ であることを証明せよ.

2 不等式

$$1 \leq \left| |x| - 2 \right| + \left| |y| - 2 \right| \leq 3$$

の表す領域を xy 平面上に図示せよ.

3 4 個の整数

$$n + 1, \quad n^3 + 3, \quad n^5 + 5, \quad n^7 + 7$$

がすべて素数となるような正の整数 n は存在しない. これを証明せよ.

4 xyz 空間内の 3 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$ を頂点とする三角形 OAB を x 軸のまわりに 1 回転させてできる円すいを V とする. 円すい V を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

5 n を 3 以上の整数とする. n 個の球 $K_1, K_2, \dots, K_n$ と n 個の空の箱 $H_1, H_2, \dots, H_n$ がある. 以下のように, $K_1, K_2, \dots, K_n$ の順番に, 球を箱に 1 つずつ入れていく.

まず, 球 K_1 を箱 $H_1, H_2, \dots, H_n$ のどれか 1 つに無作為に入れる. 次に, 球 K_2 を, 箱 H_2 が空ならば箱 H_2 に入れ, 箱 H_2 が空でなければ残りの $n - 1$ 個の空の箱のどれか 1 つに無作為に入れる.

一般に, $i = 2, 3, \dots, n$ について, 球 K_i を, 箱 H_i が空ならば箱 H_i に入れ, 箱 H_i が空でなければ残りの $n - i + 1$ 個の空の箱のどれか 1 つに無作為に入れる.

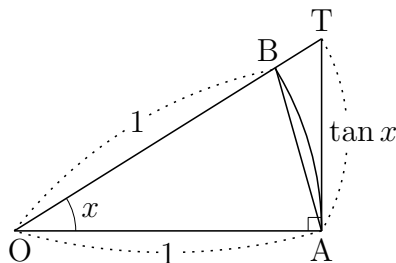
(1) K_n が^{はい}入る箱は H_1 または H_n である. これを証明せよ.

(2) K_{n-1} が H_{n-1} に入る確率を求めよ.

解答例

- 1** $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき 右の図のように、
半径が1, 中心角が x ラジアン of 扇形
OAB の点 A における円の接線と直線
OB の交点を T とすると、面積について

$$\triangle OAB < \text{扇形 OAB} < \triangle OAT$$



$$\text{が成り立つから} \quad \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin x < \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x$$

$$\text{よって} \quad \sin x < x < \tan x$$

$$\sin x > 0 \text{ より} \quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{ゆえに} \quad 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\underline{-\frac{\pi}{2} < x < 0 \text{ のとき}} \quad 0 < -x < \frac{\pi}{2} \text{ であるから, } \textcircled{1} \text{ により}$$

$$1 > \frac{\sin(-x)}{-x} > \cos(-x) \quad \text{すなわち} \quad 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\text{以上から, } 0 < |x| < \frac{\pi}{2} \text{ のとき} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \text{ であるから} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

証終

次に, $f(x) = \sin x$ とおくと, 導関数の定義により

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$\begin{aligned} \text{上式において} \quad \sin(x+h) - \sin x &= \sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x \\ &= (\cos h - 1) \sin x + \cos x \sin h \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\cos h - 1}{h} \sin x + \frac{\sin h}{h} \cos x \right)$$

$$\text{ここで, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin h}{\cos h + 1} \cdot \frac{\sin h}{h} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \text{ により}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = 0 \cdot \sin x + 1 \cdot \cos x = \cos x$$

$$\text{よって} \quad (\sin x)' = \cos x$$

別解 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき, $1 - \cos x > 0$ であるから

$$\int_0^x (1 - \cos t) dt > 0 \quad \text{ゆえに} \quad x - \sin x > 0$$

$$\text{上式から} \quad \int_0^x (t - \sin t) dt > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{x^2}{2} + \cos x - 1 > 0$$

$$\text{さらに} \quad \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} + \cos t - 1 \right) dt > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{x^3}{6} + \sin x - x > 0$$

$$\text{したがって} \quad x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \quad \text{すなわち} \quad 1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \cdots (*)$$

$-\frac{\pi}{2} < x < 0$ のとき, $0 < -x < \frac{\pi}{2}$ であるから, (*) より

$$1 - \frac{(-x)^2}{6} < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1 \quad \text{すなわち} \quad 1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\text{以上から, } 0 < |x| < \frac{\pi}{2} \text{ のとき} \quad 1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^2}{6} \right) = 1 \text{ であるから} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

証終

次に, $f(x) = \sin x$ とおくと, 導関数の定義により

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad (\sin x)' = \cos x$$

補足 上の結果から, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\int_0^x \left(\frac{t^3}{3!} + \sin t - t \right) dt > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{x^4}{4!} - \cos x + 1 - \frac{x^2}{2!} > 0$$

$$\text{したがって} \quad \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} < 1 - \cos x < \frac{x^2}{2}$$

$$0 < |x| < \frac{\pi}{2} \text{ のとき} \quad \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} < \frac{1 - \cos x}{x^2} < \frac{1}{2} \quad \text{よって} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \blacksquare$$

2 領域 $1 \leq |x| + |y| \leq 3 \cdots \textcircled{1}$ について, $x \geq 0, y \geq 0$ のとき

$$x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x + y \leq 3$$

この不等式の表す領域は, 図1の斜線部分で境界線を含む.

図1の領域にある点 (x, y) に対して, 点 $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$ は $\textcircled{1}$ を満たす. よって, $\textcircled{1}$ の表す領域は, 図2の斜線部分で境界線を含む.

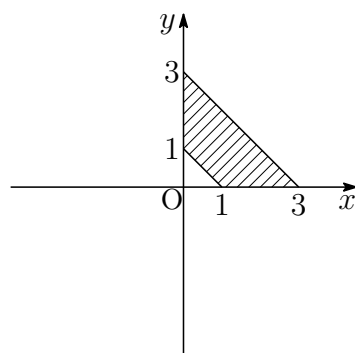


図1

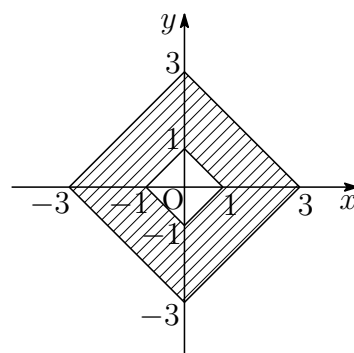


図2

$1 \leq |x-2| + |y-2| \leq 3 \cdots (*)$ について,
 $x \geq 0, y \geq 0$ のとき

$$1 \leq |x-2| + |y-2| \leq 3$$

これは, $\textcircled{1}$ の表す領域を x 軸方向に2, y 軸方向に2だけ平行移動したもので, $x \geq 0, y \geq 0$ にある領域で, 右の図の斜線部分で境界線を含む.

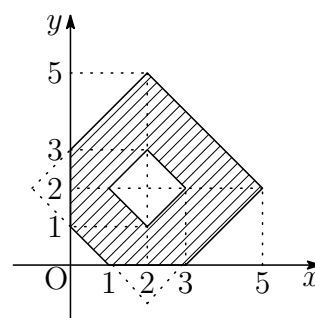
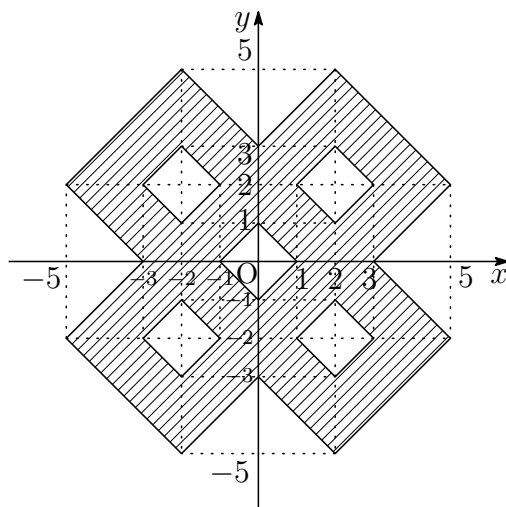


図3

図3の領域にある点 (x, y) に対して, 点 $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$ は $(*)$ を満たす. よって, 求める領域は, 下の図の斜線部分で境界線を含む.



3 $n = 1$ のとき $n^3 + 3 = 2^2$, $n = 2$ のとき $n^7 + 7 = 3^3 \cdot 5$ である.

$n \geq 3$ のとき, $n + 1$, $n^3 + 3$, $n^5 + 5$ は 3 より大きい.

$$n \equiv -1 \pmod{3} \text{ のとき } n + 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$n \equiv 0 \pmod{3} \text{ のとき } n^3 + 3 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$n \equiv 1 \pmod{3} \text{ のとき } n^5 + 5 \equiv 0 \pmod{3}$$

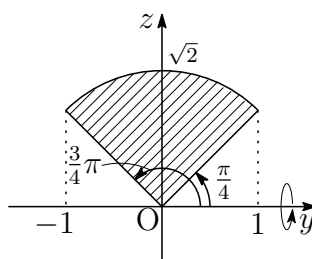
よって, 4 個の整数

$$n + 1, \quad n^3 + 3, \quad n^5 + 5, \quad n^7 + 7$$

がすべて素数となるような正の整数 n は存在しない.

補足 $n \equiv -1 \pmod{3}$ のとき $n^7 + 7 \equiv 0 \pmod{3}$ ■

4 V は, 下の図の斜線部分を y 軸の周りに回転させた立体である.



よって, 回転体 V の体積は

$$\frac{2}{3}\pi \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (\sqrt{2})^3 \sin \theta d\theta = \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi \left[-\cos \theta \right]_{\pi/4}^{3\pi/4} = \frac{8}{3}\pi$$

解説 極方程式による回転体の体積¹として求める. 東大理科 2017 年 [6] を参照².

また, 九大理系 2012 年の p.7 の例 5 で示した次の公式³ も利用できる.

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi r^2 a = \frac{4}{3}\pi (\sqrt{2})^2 \cdot 1 = \frac{8}{3}\pi$$

別解 区間 $-1 \leq y \leq 1$ において, 円 $y^2 + z^2 = 2$ を y 軸の周りに回転させた回転体の体積から半径 1, 高さ 1 の円錐 2 個の体積を引いたものであるので, 求める体積を V_0 とすると

$$\frac{V_0}{2} = \pi \int_0^1 (2 - y^2) dy - \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi \left[2y - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 - \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/N/KBdai/KBdai_ri_2016.pdf [5] 参照

²http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri_2017.pdf [6] 参照

³http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf

- 5 (1) K_j が入った時点で ($2 \leq j \leq n$), $H_2, H_3, \dots, H_j$ には球が入っている.
 ゆえに, K_{n-1} が入った時点で, $H_2, H_3, \dots, H_{n-1}$ には球が入っている.
 よって, K_n は H_1 または H_n に入る.
- (2) K_j が H_1 に入ると, $K_{j+1}, K_{j+2}, \dots, K_n$ はそれぞれ $H_{j+1}, H_{j+2}, \dots, H_n$ に入る. $K_1, K_2, \dots, K_j$ が H_1 に入らない確率を p_j ($j = 1, 2, \dots, n-1$) とすると, K_1 が H_1 に入らない確率 p_1 は

$$p_1 = \frac{n-1}{n}$$

$H_2, H_3, \dots, H_k$ および H_{k+1} の k 個すべての箱に球が入るとき, K_{k+1} が H_1 に入らない確率は (K_k が H_{k+1} , K_{k+1} は H_1 以外に入る)

$$p_k \times \frac{1}{n-k} \cdot \frac{n-k-1}{n-k}$$

$H_2, H_3, \dots, H_k$ および H_l ($k+2 \leq l \leq n$) の k 個すべての箱に球が入るとき, K_{k+1} が H_1 に入らない確率は (K_k が H_l , K_{k+1} は H_{k+1} に入る)

$$p_k \times \frac{n-k-1}{n-k} \cdot 1$$

$$\begin{aligned} \text{上の2式から} \quad p_{k+1} &= p_k \times \frac{1}{n-k} \cdot \frac{n-k-1}{n-k} + p_k \times \frac{n-k-1}{n-k} \cdot 1 \\ &= \frac{(n-k+1)(n-k-1)}{(n-k)^2} p_k \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{n+1-(k+1)}{n-(k+1)} p_{k+1} = \frac{n+1-k}{n-k} p_k$$

$$\text{ゆえに} \quad \frac{n+1-k}{n-k} p_k = \frac{n}{n-1} p_1 \quad \text{すなわち} \quad p_k = \frac{n-k}{n+1-k} \quad \dots (*)$$

$$(*) \text{ より} \quad p_{n-2} = \frac{2}{3}, \quad p_{n-1} = \frac{1}{2}$$

球を $n-2$ 個入れた時点で, 次の $A \sim C$ の事象 (これらの事象では H_2 から H_{n-2} に球が入る) の確率をそれぞれ P_A, P_B, P_C とする.

H_1	H_2		H_{n-2}	H_{n-1}	H_n	
○	●	...	●	●	○	...A
○	●	...	●	○	●	...B
●	●	...	●	○	○	...C

$$\text{このとき} \quad P_A + P_B + P_C = 1, \quad P_A + P_B = p_{n-2}, \quad \frac{1}{2}P_A + P_B = p_{n-1}$$

$$\text{これを解いて} \quad P_A = P_B = P_C = \frac{1}{3} \quad \text{よって} \quad P_B + P_C = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

別解 K_{n-1} を H_{n-1} に入れる確率を q_n とする.

K_1 が H_m に入るとき, K_j は H_j に入る ($j = 2, 3, \dots, m-1$).

	H_1	H_2	H_3	H_4	$\dots$	H_{n-2}	H_{n-1}	H_n	確率
K_1 が H_1 に入る	●	○	○	○	$\dots$	○	○	○	$\frac{1}{n}$
K_1 が H_2 に入る	○	●	○	○	$\dots$	○	○	○	$\frac{1}{n}q_{n-1}$
K_1 が H_3 に入る	○	●	●	○	$\dots$	○	○	○	$\frac{1}{n}q_{n-2}$
K_1 が H_4 に入る	○	●	●	●	$\dots$	○	○	○	$\frac{1}{n}q_{n-3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
K_1 が H_{n-2} に入る	○	●	●	●	$\dots$	●	○	○	$\frac{1}{n}q_3$
K_1 が H_{n-1} に入る	○	●	●	●	$\dots$	●	●	○	0
K_1 が H_n に入る	○	●	●	●	$\dots$	●	●	●	$\frac{1}{n}$

K_1 が $H_1, H_2, \dots, H_n$ に入る場合により次の確率漸化式が成立する.

$$q_n = \frac{1}{n}(1 + q_{n-1} + q_{n-2} + \dots + q_3 + 0 + 1)$$

これから

$$\begin{aligned} nq_n &= 2 + q_{n-1} + q_{n-2} + \dots + q_3 \\ (n+1)q_{n+1} &= 2 + q_n + q_{n-1} + q_{n-2} + \dots + q_3 \end{aligned}$$

上の2式から

$$q_{n+1} = q_n \quad (n \geq 3) \quad \dots (*)$$

$n = 3$ のとき, H_1, H_2, H_3 に球が入る順番とその確率は次の①~④.

	H_1	H_2	H_3	$\dots$	確率
①	1	2	3	$\dots$	$\frac{1}{3}$
②	2	1	3	$\dots$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$
③	3	1	2	$\dots$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$
④	3	2	1	$\dots$	$\frac{1}{3}$

K_2 が H_2 に入る確率 q_3 は, ①, ④ より

$$q_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

これと (*) により, 求める確率は

$$q_n = \frac{2}{3} \quad (n \geq 3)$$

