

平成24年度 大阪大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部 数I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5

1 $a > 0$ とする. C_1 を曲線 $x^2 + \frac{y^2}{a^2} = 1$, C_2 を直線 $y = 2ax - 3a$ とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 点 P が C_1 上を動き, 点 Q が C_2 上を動くとき, 線分 PQ の長さの最小値を $f(a)$ とする. $f(a)$ を a を用いて表せ.
- (2) 極限值 $\lim_{a \rightarrow \infty} f(a)$ を求めよ.

2 次の2つの条件 (i), (ii) をみたす自然数 n について考える.

- (i) n は素数ではない.
- (ii) l, m を1でも n でもない n の正の約数とすると, 必ず

$$|l - m| \leq 2$$

である.

このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) n が偶数のとき, (i), (ii) をみたす n をすべて求めよ.
- (2) n が7の倍数のとき, (i), (ii) をみたす n をすべて求めよ.
- (3) $2 \leq n \leq 1000$ の範囲で, (i), (ii) をみたす n をすべて求めよ.

3 xyz 空間に3点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 1)$, $B(0, \sqrt{3}, 1)$ がある. 平面 $z = 0$ に含まれ, 中心が O , 半径が1の円を W とする. 点 P が線分 OA 上を, 点 Q が円 W の周および内部を動くとき, $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ をみたす点 R 全体がつくる立体を V_A とおく. 同様に点 P が線分 OB 上を, 点 Q が円 W の周および内部を動くとき, $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ をみたす点 R 全体がつくる立体を V_B とおく. さらに V_A と V_B の重なり合う部分を V とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 平面 $z = \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) による立体 V の切り口の面積を θ を用いて表せ.
- (2) 立体 V の体積を求めよ.

- 4** 5次式 $f(x) = x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t$ (p, q, r, s, t は実数) について考える. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 数列 $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)$ が等差数列であることと,

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + lx + m$$

(l, m は実数) と書けることは互いに同値であることを示せ.

- (2) $f(x)$ は (1) の条件をみたすものとする. α を実数, k を 3 以上の自然数とする. k 項からなる数列

$$f(\alpha), f(\alpha+1), f(\alpha+2), \dots, f(\alpha+k-1)$$

が等差数列となるような α, k の組をすべて求めよ.

- 5** 1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき, 1 回目に出る目を l , 2 回目に出る目を m , 3 回目に出る目を n で表すことにする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 極限值

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{lx^2 + mx + n}{x + 1}$$

が存在する確率を求めよ.

- (2) 関数

$$f(x) = \frac{lx^2 + mx + n}{x + 1}$$

が, $x > -1$ の範囲で極値をとる確率を求めよ.

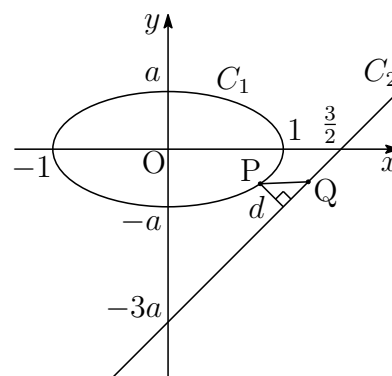
解答例

- 1** (1) $P(\cos \theta, a \sin \theta)$ とし, 点 P と直線 C_2 の距離を d とすると ($a > 0$)

$$\begin{aligned} d &= \frac{|2a \cos \theta - a \sin \theta - 3a|}{\sqrt{4a^2 + 1}} \\ &= \frac{a|\sin \theta - 2 \cos \theta + 3|}{\sqrt{4a^2 + 1}} \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{とすると}$$

$$d = \frac{a\{\sqrt{5} \sin(\theta + \alpha) + 3\}}{\sqrt{4a^2 + 1}}$$



$$PQ \geq d \text{ であるから, 求める } PQ \text{ の最小値 } f(a) \text{ は } f(a) = \frac{(3 - \sqrt{5})a}{\sqrt{4a^2 + 1}}$$

別解 $P(s, t)$ とすると $s^2 + \frac{t^2}{a^2} = 1$ ゆえに $(as)^2 + t^2 = a^2$

$$P \text{ と } C_2 : 2ax - y - 3a = 0 \text{ の距離 } d \text{ は } d = \frac{|2as - t - 3a|}{\sqrt{4a^2 + 1}}$$

$$\vec{u} = (2, -1), \quad \vec{v} = (as, t) \text{ とおくと } |\vec{u}| = \sqrt{5}, \quad |\vec{v}| = a$$

$$-|\vec{u}||\vec{v}| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}||\vec{v}| \quad \text{ゆえに} \quad -\sqrt{5}a \leq 2as - t \leq \sqrt{5}a$$

$$\text{したがって } \frac{(3 - \sqrt{5})a}{\sqrt{4a^2 + 1}} \leq d \leq \frac{(3 + \sqrt{5})a}{\sqrt{4a^2 + 1}} \quad \text{よって } f(a) = \frac{(3 - \sqrt{5})a}{\sqrt{4a^2 + 1}}$$

(2) (1) の結果から

$$\lim_{a \rightarrow \infty} f(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{(3 - \sqrt{5})a}{\sqrt{4a^2 + 1}} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{4 + \frac{1}{a^2}}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

■

- 2** (1) $n = 2l$ とおくと (l は 2 以上の整数), (ii) より

$$|l - 2| \leq 2 \quad \text{ゆえに} \quad l = 2, 3, 4 \quad \text{すなわち} \quad n = 4, 6, 8$$

これらは, 条件 (i), (ii) をみたす. よって $n = 4, 6, 8$

- (2) $n = 7l$ とおくと (l は 2 以上の整数), (ii) より

$$|l - 7| \leq 2 \quad \text{ゆえに} \quad l = 5, 6, 7, 8, 9$$

すなわち $n = 35, 42, 49, 56, 63$

このうち, 条件 (i), (ii) をみたすものは $n = 35, 49$

- (3) 条件 (i), (ii) をみたす偶数 n は (1) で求めたので, これらの条件をみたす奇数 n を求める. このとき, n は 3 個以上の奇数を約数にもつことはない. 実際, 3 個の奇数を p, q, r とすると ($p < q < r$), $r - p \geq 4$ であるから, 条件 (ii) をみたさない. (i) より n は素数ではないから, n は 2 個の奇素数の積で, 条件 (ii) をみたすのは

$$p^2 \quad \text{または} \quad p(p+2) \quad (p, p+2 \text{ は奇素数})$$

- (a) $n = p^2$ のとき (p は奇素数), $2 \leq n \leq 1000$ であるものは

$$n = 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2, 29^2, 31^2$$

- (b) $n = p(p+2)$ のとき ($p, p+2$ は奇素数), $2 \leq n \leq 1000$ であるものは

$$n = 3 \cdot 5, 5 \cdot 7, 11 \cdot 13, 17 \cdot 19, 29 \cdot 31$$

したがって, (1), (a), (b) より, 求める n は

$$\begin{aligned} n = & 4, 6, 8, \\ & 9, 25, 49, 121, 169, 289, 361, 529, 841, 961, \\ & 15, 35, 143, 323, 899 \end{aligned}$$



3 (1) $\overrightarrow{OA_\theta} = (\cos \theta) \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_\theta} = (\cos \theta) \overrightarrow{OB}$ とすると $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$

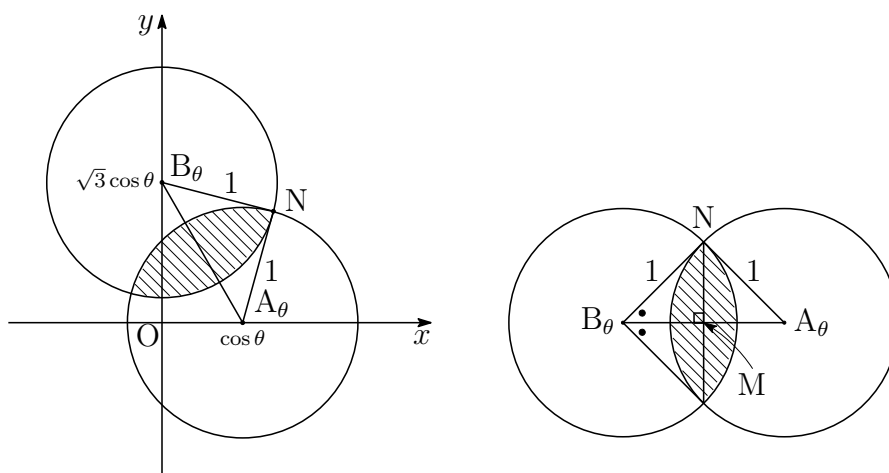
$$A_\theta(\cos \theta, 0, \cos \theta), \quad B_\theta(0, \sqrt{3} \cos \theta, \cos \theta)$$

$A_\theta B_\theta = 2 \cos \theta$ であるから, 線分 $A_\theta B_\theta$ の中点を M とすると

$$B_\theta M = \cos \theta$$

A_θ を中心とする半径 1 の円と B_θ を中心とする半径 1 の交点の 1 つを N とすると, $\triangle MNB_\theta$ は, NB_θ を斜辺とする直角三角形である. 右下の図より

$$\angle NB_\theta M = \theta$$



求める面積は図の斜線部分で, その面積を S とすると

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot 2\theta - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \sin 2\theta \quad \text{よって} \quad S = 2\theta - \sin 2\theta$$

(2) $z = \cos \theta$ より $\frac{dz}{d\theta} = -\sin \theta$

z	$0 \rightarrow 1$
θ	$\frac{\pi}{2} \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 S dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 S \frac{dz}{d\theta} d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (2\theta - \sin 2\theta)(-\sin \theta) d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\theta \sin \theta - \sin^2 \theta \cos \theta) d\theta \\ &= 2 \left[-\theta \cos \theta + \sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

■

- 4 (1) 5次式 $f(x) = x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t$ (p, q, r, s, t は実数) について, 数列 $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)$ が等差数列であるとき, その初項を m , 公差を l とすると

$$f(k) = lk + m \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4)$$

ここで, $g(x) = f(x) - (lx + m)$ とおくと, $g(k) = 0$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) であるから, 因数定理により, $g(x)$ は $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ を因数にもつ. このとき, 5次式 $f(x)$ の x^5 の係数が1であることに注意して

$$g(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

したがって

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + lx + m \quad (l, m \text{ は実数})$$

逆に, 上式より, 数列 $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)$ は等差数列である.

- (2) (1) の結果から

$$f(x+1) - f(x) = 5x(x-1)(x-2)(x-3) + l \quad \cdots (*)$$

これから, 数列 $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ は等差数列ではない.
 k ($k \geq 3$) 項からなる数列

$$f(\alpha), f(\alpha+1), f(\alpha+2), \dots, f(\alpha+k-1)$$

が等差数列であるとき

$$f(\alpha+1) - f(\alpha) = f(\alpha+2) - f(\alpha+1)$$

が成立することが必要条件であるから, (*) より

$$5\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3) + l = 5(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + l$$

ゆえに $\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) = 0$ すなわち $\alpha = 0, 1, 2$

(1) の結論により $\alpha = 0$ のとき $k = 3, 4, 5$

$\alpha = 1$ のとき $k = 3, 4$

$\alpha = 2$ のとき $k = 3$

よって $(\alpha, k) = (0, 3), (0, 4), (0, 5), (1, 3), (1, 4), (2, 3)$ ■

$$\boxed{5} \quad (1) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{lx^2 + mx + n}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \left(lx + m - l + \frac{l - m + n}{x + 1} \right)$$

この極限が存在する条件は $l - m + n = 0$ ゆえに $l + n = m$

m ($2 \leq m \leq 6$) に対して, (l, n) の組合せの個数は

$$m - 1 \text{ (通り)}$$

すべての場合の総数は 6^3 通りであるから, 求める確率は

$$\frac{1}{6^3} \sum_{m=2}^6 (m - 1) = \frac{1}{6^3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = \frac{5}{72}$$

$$(2) \quad f(x) = \frac{lx^2 + mx + n}{x + 1} = lx + m - l + \frac{l - m + n}{x + 1} \text{ より}$$

$$f'(x) = l - \frac{l - m + n}{(x + 1)^2} = \frac{l(x + 1)^2 - l + m - n}{(x + 1)^2}$$

$g(x) = l(x + 1)^2 - l + m - n$ とおくと, $y = g(x)$ のグラフは, $x = -1$ を軸とする下に凸の放物線である. $f(x)$ が $x > -1$ で極値をもつとき, $x > -1$ に $g(x) = 0$ となる x が存在するから, $g(-1) < 0$ より

$$-l + m - n < 0 \quad \text{ゆえに} \quad m < l + n$$

よって, 求める確率は

$$\begin{aligned} P(m < l + n) &= 1 - P(m \geq l + n) \\ &= 1 - \frac{1}{6^3} \sum_{m=2}^6 \sum_{k=2}^m (k - 1) \\ &= 1 - \frac{1}{6^3} \sum_{m=2}^6 \frac{1}{2} m(m - 1) \\ &= 1 - \frac{1}{6^3} \sum_{m=2}^6 \frac{1}{6} \{ (m + 1)m(m - 1) - m(m - 1)(m - 2) \} \\ &= 1 - \frac{1}{6^3} \cdot \frac{1}{6} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1 - \frac{35}{6^3} = \frac{181}{216} \end{aligned}$$

■