

平成23年度 大阪大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部 数I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5

- 1 a を自然数とする. O を原点とする座標平面上で行列 $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ の表す1次変換を f とする.

- (1) $r > 0$ および $0 \leq \theta < 2\pi$ を用いて $A = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$ と表すとき,
 $r, \cos \theta, \sin \theta$ を a で表せ.

- (2) 点 $Q(1, 0)$ に対し, 点 Q_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を

$$Q_1 = Q, \quad Q_{n+1} = f(Q_n)$$

で定める. $\triangle OQ_nQ_{n+1}$ の面積 $S(n)$ を a と n を用いて表せ.

- (3) f によって点 $(2, 7)$ に移されるもとの点 P の x 座標の小数第一位を四捨五入して得られる近似値が2であるという. 自然数 a の値を求めよ. またこのとき $S(n) > 10^{10}$ となる最小の n の値を求めよ. ただし $0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ を用いてよい.

- 2 実数 θ が動くとき, xy 平面上の動点 $P(0, \sin \theta)$ および $Q(8 \cos \theta, 0)$ を考える. θ が $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, 平面内で線分 PQ が通過する部分を D とする. D を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V を求めよ.

- 3 実数の組 (p, q) に対し, $f(x) = (x - p)^2 + q$ とおく.

- (1) 放物線 $y = f(x)$ が点 $(0, 1)$ を通り, しかも直線 $y = x$ の $x > 0$ の部分と接するような実数の組 (p, q) と接点の座標を求めよ.
(2) 実数の組 $(p_1, q_1), (p_2, q_2)$ に対して, $f_1(x) = (x - p_1)^2 + q_1$ および $f_2(x) = (x - p_2)^2 + q_2$ とおく. 実数 α, β (ただし $\alpha < \beta$) に対して

$$f_1(\alpha) < f_2(\alpha) \quad \text{かつ} \quad f_1(\beta) < f_2(\beta)$$

であるならば, 区間 $\alpha \leq x \leq \beta$ において不等式 $f_1(x) < f_2(x)$ がつねに成り立つことを示せ.

- (3) 長方形 $R: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ を考える. また, 4点 $P_0(0, 1), P_1(0, 0), P_2(1, 1), P_3(1, 0)$ をこの順に線分で結んで得られる折れ線を L とする. 実数の組 (p, q) を, 放物線 $y = f(x)$ と折れ線 L に共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき, R の点のうちで放物線 $y = f(x)$ が通過する点全体の集合を T とする. R から T を除いた領域 S を座標平面上に図示し, その面積を求めよ.

- 4 a, b, c を正の定数とし, x の関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ を考える. 以下, 定数はすべて実数とする.

(1) 定数 p, q に対し, 次をみたす定数 r が存在することを示せ.

$$x \geq 1 \quad \text{ならば} \quad |px + q| \leq rx$$

(2) 恒等式 $(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$ を用いて, 次をみたす定数 k, l が存在することを示せ.

$$x \geq 1 \quad \text{ならば} \quad \left| \sqrt[3]{f(x)} - x - k \right| \leq \frac{l}{x}$$

(3) すべての自然数 n に対して, $\sqrt[3]{f(n)}$ が自然数であるとする. このとき関数 $f(x)$ は, 自然数の定数 m を用いて $f(x) = (x + m)^3$ と表されることを示せ.

- 5 正数 r に対して, $a_1 = 0, a_2 = r$ とおき, 数列 $\{a_n\}$ を次の漸化式で定める.

$$a_{n+1} = a_n + r_n(a_n - a_{n-1}) \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

ただし a_n と a_{n-1} から漸化式を用いて a_{n+1} を決める際には硬貨を投げ, 表がでたとき $r_n = \frac{r}{2}$, 裏がでたとき $r_n = \frac{1}{2r}$ とする. ここで表がでる確率と裏がでる確率は等しいとする. a_n の期待値を p_n とするとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) p_3 および p_4 を, r を用いて表せ.
- (2) $n \geq 3$ のときに p_n を, n と r を用いて表せ.
- (3) 数列 $\{p_n\}$ が収束するような正数 r の範囲を求めよ.
- (4) r が (3) で求めた範囲を動くとき, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ の最小値を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$a = r \cos \theta, \quad 1 = r \sin \theta$$

$$\text{ゆえに} \quad r^2 = a^2 + 1 \quad r > 0 \text{ より} \quad r = \sqrt{a^2 + 1}$$

$$\text{よって} \quad \cos \theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}, \quad \sin \theta = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

$$(2) \quad Q_2 = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} Q_{n-1} & Q_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\det \begin{pmatrix} Q_{n-1} & Q_n \end{pmatrix} = \det A^{n-1} \det \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \end{pmatrix}$$

$$= (\det A)^{n-1} \cdot 1 = (a^2 + 1)^{n-1}$$

$$\text{よって} \quad S(n) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} Q_{n-1} & Q_n \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} (a^2 + 1)^{n-1}$$

$$(3) \quad A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + 1} \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + 1} \begin{pmatrix} 2a + 7 \\ -2 + 7a \end{pmatrix}$$

$\frac{2a+7}{a^2+1}$ を四捨五入して 2 となる自然数 a を求めればよい.

$$\frac{3}{2} \leq \frac{2a+7}{a^2+1} < \frac{5}{2} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} a(3a-4) \leq 11 \\ a(5a-4) > 9 \end{cases}$$

これを満たす自然数 a は **2**

$S(n) = \frac{5^{n-1}}{2}$ であるから, $\frac{5^{n-1}}{2} > 10^{10}$ の両辺の常用対数をとると

$$(n-1) \log_{10} 5 - \log_{10} 2 > 10 \quad \text{ゆえに} \quad n > \frac{11}{\log_{10} 5}$$

$0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ より, $\frac{69}{100} < \log_{10} 5 < \frac{7}{10}$ であるから

$$15 \frac{5}{7} = \frac{110}{7} < \frac{11}{\log_{10} 5} < \frac{1100}{69} = 15 \frac{65}{69}$$

よって, 求める最小の n は **16**

■

2 2点 $P(0, \sin \theta)$, $Q(8 \cos \theta, 0)$ を通る直線の方程式は $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$

$$\frac{x}{8 \cos \theta} + \frac{y}{\sin \theta} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad y = \sin \theta - \frac{x}{8} \tan \theta \quad \dots \textcircled{1}$$

この直線上の x を固定し, y が極値をとる点では, $\frac{dy}{d\theta} = 0$ であるから

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos \theta - \frac{x}{8 \cos^2 \theta} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = 8 \cos^3 \theta \quad \dots \textcircled{2}$$

② を ① に代入すると

$$y = \sin \theta - \frac{8 \cos^3 \theta}{8} \tan \theta \quad \text{ゆえに} \quad y = \sin^3 \theta \quad \dots \textcircled{3}$$

②, ③ より, 直線 PQ の包絡線は, $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ のときも成立することに注意して

$$(*) \begin{cases} x = 8 \cos^3 \theta \\ y = \sin^3 \theta \end{cases} \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

(*) から, θ を消去すると

$$y = \left\{ 1 - \left(\frac{x}{8} \right)^{\frac{2}{3}} \right\}^{\frac{3}{2}} \quad (0 \leq x \leq 8)$$

$$x = 8t \text{ とおくと } \frac{dx}{dt} = 8 \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \longrightarrow 8 \\ \hline t & 0 \longrightarrow 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^8 y^2 dx = \int_0^8 \left\{ 1 - \left(\frac{x}{8} \right)^{\frac{2}{3}} \right\}^3 dx = 8 \int_0^1 (1 - t^{\frac{2}{3}})^3 dt \\ &= 8 \int_0^1 (1 - 3t^{\frac{2}{3}} + 3t^{\frac{4}{3}} - t^2) dt \\ &= 8 \left[t - \frac{9}{5} t^{\frac{5}{3}} + \frac{9}{7} t^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 = \frac{128}{105} \end{aligned}$$

よって $V = \frac{128}{105} \pi$

別解 (*) より $\frac{dx}{d\theta} = -24 \cos^2 \theta \sin \theta$

x	$0 \longrightarrow 8$
θ	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 \frac{V}{\pi} &= \int_0^8 y^2 dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^6 \theta (-24 \cos^2 \theta \sin \theta) d\theta \\
 &= 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 \theta \cos^2 \theta d\theta \\
 &= 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta (1 - \cos^2 \theta)^3 \cos^2 \theta d\theta \\
 &= 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \theta - 3 \cos^4 \theta + 3 \cos^6 \theta - \cos^8 \theta) \sin \theta d\theta \\
 &= 24 \left[-\frac{1}{3} \cos^3 \theta + \frac{3}{5} \cos^5 \theta - \frac{3}{7} \cos^7 \theta + \frac{1}{9} \cos^9 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{128}{105}
 \end{aligned}$$

■

- 3** (1) 放物線 $y = (x - p)^2 + q$ が点 $(0, 1)$ を通るから $p^2 + q = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$
 $y = (x - p)^2 + q$ と $y = x$ から y を消去すると

$$(x - p)^2 + q = x \quad \text{整理すると} \quad x^2 - (2p + 1)x + p^2 + q = 0 \quad \cdots (*)$$

上の放物線と直線は接するから、(*) の係数について

$$(2p + 1)^2 - 4(p^2 + q) = 0 \quad \text{整理すると} \quad 4p - 4q + 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

(*) より、接点の x 座標 $\frac{2p + 1}{2}$ が正であるから

$$\frac{2p + 1}{2} > 0 \quad \text{これを解いて} \quad p > -\frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{3}$$

①, ② から q を消去すると

$$4p^2 + 4p - 3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (2p + 3)(2p - 1) = 0$$

③ に注意して解くと $p = \frac{1}{2}, q = \frac{3}{4}$

接点の x 座標は 1 で、直線 $y = x$ 上の点であるから 接点 $(1, 1)$

(2) $g(x) = f_2(x) - f_1(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} g(x) &= (x - p_2)^2 + q_2 - (x - p_1)^2 - q_1 \\ &= 2(p_1 - p_2)x - p_1^2 + p_2^2 - q_1 + q_2 \end{aligned}$$

$g(x)$ のグラフは直線であるから, $m = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha}$ とおくと

$$g(x) = m(x - \alpha) + g(\alpha) \quad \cdots (A)$$

または

$$g(x) = m(x - \beta) + g(\beta) \quad \cdots (B)$$

とおける ($\alpha < \beta$). 与えられた条件から, $g(\alpha) > 0$, $g(\beta) > 0$ である.

(i) $0 < g(\alpha) \leq g(\beta)$ のとき

(A) より, $\alpha \leq x \leq \beta$ において, $m \geq 0$, $x - \alpha \geq 0$ であるから

$$g(x) = m(x - \alpha) + g(\alpha) \geq g(\alpha) > 0$$

(ii) $0 < g(\beta) < g(\alpha)$ のとき

(B) より, $\alpha \leq x \leq \beta$ において, $m < 0$, $x - \beta \leq 0$ であるから

$$g(x) = m(x - \beta) + g(\beta) \geq g(\beta) > 0$$

(i), (ii) より, $\alpha \leq x \leq \beta$ において $g(x) > 0$ すなわち $f_1(x) < f_2(x)$

(3) (1) の結果から

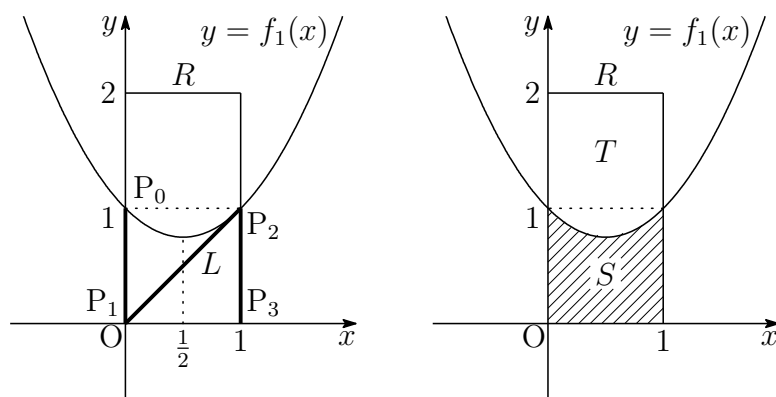
$$f_1(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = x^2 - x + 1$$

とおくと $f_1(0) = 1, f_1(1) = 1$

R を通過する放物線 $y = f_2(x)$ が L と共有点がないから

$$f_1(0) < f_2(0), f_1(1) < f_2(1)$$

(2) の結論から, $0 \leq x \leq 1$ において, $f_1(x) < f_2(x)$ であるから, R の点のうちで放物線 $y = f_2(x)$ が通過する点全体の集合は, R の点のうちで放物線 $y = f_1(x)$ の上側である. したがって, R から T を除いた領域 S は右下の図の斜線部分で, 境界線を含む.



よって, 求める面積は

$$\int_0^1 (x^2 - x + 1) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^1 = \frac{5}{6}$$

■

4 (1) $x \geq 1$ のとき

$$|px + q| \leq |px| + |q| \leq |p|x + |q|x = (|p| + |q|)x$$

$r = |p| + |q|$ とするとき, 次が成立する.

$$x \geq 1 \quad \text{ならば} \quad |px + q| \leq rx$$

(2) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ について, $a = 3k$ とおくと ($k > 0$)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 3kx^2 + bx + c \\ &= (x + k)^3 + (b - 3k^2)x + c - k^3 \end{aligned}$$

さらに, $p = b - 3k^2$, $q = c - k^3$ とおくと

$$f(x) - (x + k)^3 = px + q$$

$a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ であるから, $x \geq 1$ のとき $f(x) > x^3$

$\alpha = \sqrt[3]{f(x)}$, $\beta = x + k$ とおくと $\alpha > x$, $\beta > x$

$$\begin{aligned} \alpha^3 - \beta^3 &= px + q, \\ \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 &> x^2 + x \cdot x + x^2 = 3x^2 \end{aligned}$$

$|\alpha^3 - \beta^3| = |\alpha - \beta|(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ より

$$\begin{aligned} |px + q| &> \left| \sqrt[3]{f(x)} - x - k \right| \cdot 3x^2 \\ \left| \sqrt[3]{f(x)} - x - k \right| &< \frac{|px + q|}{3x^2} \end{aligned}$$

$r = 3l$ とおいて, (1) の結果を上式に代入すると

$$\left| \sqrt[3]{f(x)} - x - k \right| < \frac{3lx}{3x^2} = \frac{l}{x}$$

よって, 次を満たす定数 k , l が存在する.

$$x \geq 1 \quad \text{ならば} \quad \left| \sqrt[3]{f(x)} - x - k \right| \leq \frac{l}{x}$$

(3) (2) の結果に $x = n$ を代入すると (n は自然数)

$$\left| \sqrt[3]{f(n)} - n - k \right| \leq \frac{l}{n}$$

$m = [k]$, $\gamma = k - [k]$ とすると ($0 \leq \gamma < 1$)

$$\left| \sqrt[3]{f(n)} - n - m - \gamma \right| \leq \frac{l}{n}$$

したがって $\gamma - \frac{l}{n} \leq \sqrt[3]{f(n)} - n - m \leq \gamma + \frac{l}{n}$

$I_n = \left[\gamma - \frac{l}{n}, \gamma + \frac{l}{n} \right]$, $a_n = \sqrt[3]{f(n)} - n - m$ とおくと (a_n は整数)

$$a_n \in I_n \quad \cdots (*)$$

(i) $0 < \gamma < 1$ のとき, 次をみたす自然数 N が存在する

$$0 < \gamma - \frac{l}{N} \quad \text{かつ} \quad \gamma + \frac{l}{N} < 1$$

このとき, $n \geq N$ に対して, $(*)$ は成立しない.

(ii) $\gamma = 0$ のとき, $n > l$ をみたす自然数 n について $(*)$ が成立するから

$$a_n = 0 \quad \text{すなわち} \quad \sqrt[3]{f(n)} - n - m = 0$$

(i), (ii) より, $f(n) = (n + m)^3$ となるから, このとき関数 $f(x)$ は

$$f(x) = (x + m)^3$$

と表される. ■

- 5 (1) 与えられた漸化式より, $\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} = r_n$ であるから ($n = 2, 3, 4, \dots$)

$$\prod_{k=2}^n \frac{a_{k+1} - a_k}{a_k - a_{k-1}} = \prod_{k=2}^n r_k \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a_{n+1} - a_n}{a_2 - a_1} = \prod_{k=2}^n r_k$$

$$a_1 = 0, \quad a_2 = r \quad \text{より,} \quad a_{n+1} - a_n = r \prod_{k=2}^n r_k \quad \text{であるから}$$

$$\sum_{j=2}^{n-1} (a_{j+1} - a_j) = r \sum_{j=2}^{n-1} \prod_{k=2}^j r_k \quad \text{ゆえに} \quad a_n = r + r \sum_{j=2}^{n-1} \prod_{k=2}^j r_k$$

したがって

$$\begin{aligned} p_n &= r + r \sum_{j=2}^{n-1} \prod_{k=2}^j \frac{1}{2} \left(\frac{r}{2} + \frac{1}{2r} \right) = r + r \sum_{j=2}^{n-1} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{r}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2r} \right)^{j-1} \\ &= r \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{r^2 + 1}{4r} \right)^{j-1} \quad \dots (*) \end{aligned}$$

よって, (*) に $n = 3, 4$ を代入すると

$$\begin{aligned} p_3 &= r \left(1 + \frac{r^2 + 1}{4r} \right) = \frac{1}{4} (r^2 + 4r + 1), \\ p_4 &= r \left\{ 1 + \frac{r^2 + 1}{4r} + \left(\frac{r^2 + 1}{4r} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{16r} (r^4 + 4r^3 + 18r^2 + 4r + 1) \end{aligned}$$

(2) (*) より

$$p_n = \frac{r \left\{ \left(\frac{r^2 + 1}{4r} \right)^{n-1} - 1 \right\}}{\frac{r^2 + 1}{4r} - 1} = \frac{4r^2}{r^2 - 4r + 1} \left\{ \left(\frac{r^2 + 1}{4r} \right)^{n-1} - 1 \right\}$$

(3) (2) の結果から, $\{p_n\}$ が収束するとき, $r > 0$ に注意して

$$\frac{r^2 + 1}{4r} < 1 \quad \text{ゆえに} \quad r^2 - 4r + 1 < 0 \quad \cdots (**)$$

$$\text{これを解いて} \quad 2 - \sqrt{3} < r < 2 + \sqrt{3}$$

(4) r が (3) で求めた範囲を動くとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = -\frac{4r^2}{r^2 - 4r + 1} = \frac{4}{-\frac{1}{r^2} + \frac{4}{r} - 1} = \frac{4}{-\left(\frac{1}{r} - 2\right)^2 + 3}$$

(**) および (3) の結果に注意すると, $r = \frac{1}{2}$ のとき, 最小値 $\frac{4}{3}$ をとる. ■