

平成22年度 大阪大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部 数I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5

1 関数

$$f(x) = 2\log(1 + e^x) - x - \log 2$$

を考える。ただし、対数は自然対数であり、 e は自然対数の底とする。

(1) $f(x)$ の第2次導関数を $f''(x)$ とする。等式

$$\log f''(x) = -f(x)$$

が成り立つことを示せ。

(2) 定積分 $\int_0^{\log 2} (x - \log 2)e^{-f(x)} dx$ を求めよ。

2 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。2つの曲線

$$C_1 : x^2 + 3y^2 = 3, \quad C_2 : \frac{x^2}{\cos^2 \theta} - \frac{y^2}{\sin^2 \theta} = 2$$

の交点のうち、 x 座標と y 座標がともに正であるものを P とする。 P における C_1 , C_2 の接線をそれぞれ ℓ_1 , ℓ_2 とし、 y 軸と ℓ_1 , ℓ_2 の交点をそれぞれ Q , R とする。 θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき、線分 QR の長さの最小値を求めよ。

3 ℓ , m , n を3以上の整数とする。等式

$$\left(\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1\right)\ell = 2$$

を満たす ℓ , m , n の組をすべて求めよ。

4 半径3の球 T_1 と半径1の球 T_2 が、内接した状態で空間で固定されている。半径1の球 S が次の条件 (A), (B) を同時に満たしながら動く。

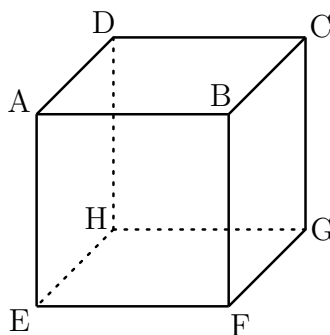
(A) S は T_1 の内部にあるか T_1 に内接している。

(B) S は T_2 の外部にあるか T_2 に外接している。

S の中心が存在しうる範囲を D とするとき、立体 D の体積を求めよ。

5 n を 0 以上の整数とする．立方体 ABCD-EFGH の頂点を，以下のように移動する 2 つの動点 P, Q を考える．時刻 0 には P は頂点 A に位置し，Q は頂点 C に位置している．時刻 n において，P と Q が異なる頂点に位置していれば，時刻 $n+1$ には，P は時刻 n に位置していた頂点から，それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移り，Q も時刻 n に位置していた頂点から，それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移る．一方，時刻 n において，P と Q が同じ頂点に位置していれば，時刻 $n+1$ には P も Q も時刻 n の位置からは移動しない．

- (1) 時刻 1 において，P と Q が異なる頂点に位置するとき，P と Q はどの頂点にあるか．可能な組み合わせをすべて挙げよ．
- (2) 時刻 n において，P と Q が異なる頂点に位置する確率 r_n を求めよ．
- (3) 時刻 n において，P と Q がともに上面 ABCD の異なる頂点に位置するか，またはともに下面 EFGH の異なる頂点に位置するかのいずれかである確率を p_n とする．また，時刻 n において，P と Q のいずれか一方が上面 ABCD，他方が下面 EFGH にある確率を q_n とする． p_{n+1} を， p_n と q_n を用いて表せ．
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{p_n}$ を求めよ．



解答例

1 (1) $f(x) = 2 \log(1 + e^x) - x - \log 2$ より

$$f'(x) = \frac{2e^x}{1 + e^x} - 1 = 1 - \frac{2}{1 + e^x}$$

$$f''(x) = \frac{2e^x}{(1 + e^x)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad \log f''(x) &= \log \frac{2e^x}{(1 + e^x)^2} \\ &= \log 2 + x - 2 \log(1 + e^x) = -f(x) \end{aligned}$$

(2) (1) の結果より, $e^{-f(x)} = f''(x)$ であるから

$$\begin{aligned} \int_0^{\log 2} (x - \log 2) e^{-f(x)} dx &= \int_0^{\log 2} (x - \log 2) f''(x) dx \\ &= \left[(x - \log 2) f'(x) \right]_0^{\log 2} - \int_0^{\log 2} f'(x) dx \\ &= f'(0) \log 2 - f(\log 2) + f(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで} \quad f(\log 2) &= 2 \log(1 + 2) - \log 2 - \log 2 \\ &= 2 \log 3 - 2 \log 2, \\ f(0) &= 2 \log(1 + 1) - 0 - \log 2 = \log 2, \\ f'(0) &= 1 - \frac{2}{1 + 1} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \int_0^{\log 2} (x - \log 2) e^{-f(x)} dx &= 0 \cdot \log 2 - (2 \log 3 - 2 \log 2) + \log 2 \\ &= 3 \log 2 - 2 \log 3 = \log \frac{8}{9} \end{aligned}$$



2 $x^2 + 3y^2 = 3, \frac{x^2}{\cos^2 \theta} - \frac{y^2}{\sin^2 \theta} = 2$ より,

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 3 \\ x^2 \sin^2 \theta - y^2 \cos^2 \theta = 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \end{cases}$$

これを x^2 および y^2 の連立方程式として解くと

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{3 \cos^2 \theta (2 \sin^2 \theta + 1)}{3 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = 3 \cos^2 \theta, \\ y^2 &= \frac{\sin^2 \theta (-2 \cos^2 \theta + 3)}{3 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$x > 0, y > 0, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるから $x = \sqrt{3} \cos \theta, y = \sin \theta$

C_1, C_2 の共有点が $(\sqrt{3} \cos \theta, \sin \theta)$ であるから

$$l_1 : \sqrt{3}x \cos \theta + 3y \sin \theta = 3, \quad l_2 : \frac{\sqrt{3}x}{\cos \theta} - \frac{y}{\sin \theta} = 2$$

したがって $Q\left(0, \frac{1}{\sin \theta}\right), R(0, -2 \sin \theta)$ ゆえに $QR = 2 \sin \theta + \frac{1}{\sin \theta}$

$\sin \theta > 0$ であるから、相加・相乗平均の大小関係により

$$2 \sin \theta + \frac{1}{\sin \theta} \geq 2 \sqrt{2 \sin \theta \cdot \frac{1}{\sin \theta}} = 2\sqrt{2}$$

上式で等号が成立するとき

$$2 \sin \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{ゆえに} \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

よって、 $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき、 QR は最小値 $2\sqrt{2}$ をとる. ■

3 $\left(\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1\right) \ell = 2$ より (ℓ, m, n は 3 以上の整数)

$$\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1 = \frac{2}{\ell} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\ell n} > \frac{1}{2} \quad (*)$$

$m \geq 4, n \geq 4$ と仮定すると、 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$ となり、上の第 2 式に反する.

したがって、 m, n の少なくとも一方は 3 である.

(i) $m = 3$ のとき

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\ell n} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{n} = \frac{1}{6} + \frac{2}{\ell n} > \frac{1}{6}$$

このとき, $n = 3, 4, 5$ であるから

$$(\ell, n) = (4, 3), (6, 4), (12, 5)$$

(ii) $n = 3$ のとき

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3\ell} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{6} + \frac{2}{3\ell} > \frac{1}{6}$$

このとき, $m = 3, 4, 5$ であるから

$$(\ell, m) = (4, 3), (8, 4), (20, 5)$$

(i), (ii) より

$$(\ell, m, n) = (4, 3, 3), (6, 3, 4), (12, 3, 5), (8, 4, 3), (20, 5, 3)$$

別解 (*) より $mn - 2m - 2n < 0$ ゆえに $(m-2)(n-2) < 4$

m, n は 3 以上の整数であるから

$$(m-2, n-2) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)$$

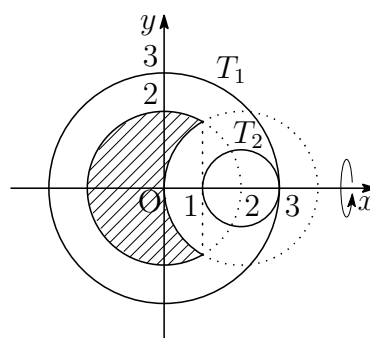
すなわち $(m, n) = (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)$

これらを与えられた等式に代入することにより, ℓ が求まる. ■

4 立体 D の体積は, 右の図の斜線部分を x 軸の周りに 1 回転させたものであるから, その体積を V とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_{-2}^1 (4 - x^2) dx - \int_0^1 \{4 - (x-2)^2\} dx \\ &= \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^1 - \left[4x - \frac{1}{3}(x-2)^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{22}{3} \end{aligned}$$

よって $V = \frac{22}{3}\pi$ ■



5 (1) P, Q の可能な組合せは次の 7 通り

(B, D), (B, G), (D, B), (D, G), (E, B), (E, D), (E, G)

(2) 時刻 $n+1$ で P と Q は立方体の異なる頂点にあるものとする.

(i) 時刻 n で P と Q が (上面 ABCD または下面 EFGH の) 同じ面にあるとき, 時刻 $n+1$ で P と Q が (上面 ABCD または下面 EFGH の) 同じ面にある確率は

$$\frac{2+1}{3^2} = \frac{1}{3}$$

(ii) 時刻 n で P と Q が (上面 ABCD または下面 EFGH の) 同じ面にあるとき, 時刻 $n+1$ で P と Q が (上面 ABCD と下面 EFGH の) 異なる面にある確率は

$$\frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

(iii) 時刻 n で P と Q が (上面 ABCD と下面 EFGH の) 異なる面にあるとき, 時刻 $n+1$ で P と Q が (上面 ABCD または下面 EFGH の) 同じ面にある確率は

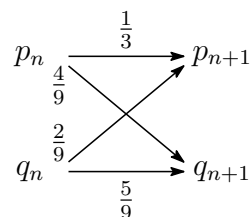
$$\frac{2}{3^2} = \frac{2}{9}$$

(iv) 時刻 n で P と Q が (上面 ABCD と下面 EFGH の) 異なる面にあるとき, 時刻 $n+1$ で P と Q が (上面 ABCD と下面 EFGH の) 異なる面にある確率は

$$\frac{2^2 + 1^2}{3^2} = \frac{5}{9}$$

(i)~(iv) から, (3) の p_n, q_n について次の確率漸化式が成立する.

$$(*) \begin{cases} p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{9}q_n \\ q_{n+1} = \frac{4}{9}p_n + \frac{5}{9}q_n \end{cases}$$



$r_n = p_n + q_n$ であるから, (*) の 2 式の辺々を加えると

$$p_{n+1} + q_{n+1} = \frac{7}{9}p_n + \frac{7}{9}q_n \quad \text{ゆえに} \quad r_{n+1} = \frac{7}{9}r_n$$

(1) の結果より, $r_1 = \frac{7}{9}$ であるから $r_n = \left(\frac{7}{9}\right)^n$

補足 時刻 n で P と Q が立方体の異なる頂点にあるとすると, n が偶数のとき, 動点 P, Q は 4 頂点 A, C, F, H にあり, n が奇数のとき, 動点 P, Q は 4 頂点 B, D, E, G にある.

$$(3) \text{ (＊) より } \quad p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{9}q_n$$

$$(4) \text{ (＊) から } \quad p_{n+1} + q_{n+1} = \frac{7}{9}(p_n + q_n), \quad 2p_{n+1} - q_{n+1} = \frac{1}{9}(2p_n - q_n)$$

$p_0 = 1, q_0 = 0$ であるから

$$p_n + q_n = \left(\frac{7}{9}\right)^n, \quad 2p_n - q_n = 2\left(\frac{1}{9}\right)^n$$

$$\text{したがって} \quad p_n = \frac{1}{3 \cdot 9^n}(7^n + 2), \quad q_n = \frac{1}{3 \cdot 9^n}(2 \cdot 7^n - 2)$$

$$\text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 7^n - 2}{7^n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{2}{7^n}}{1 + \frac{2}{7^n}} = 2$$

