

平成20年度 大阪大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部 数I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5

1 2次の正方行列 $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$ を

$$A_0 = O, \quad A_n = B + A_{n-1}C \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める. ただし, O は2次の零行列, B と C は2次の正方行列とする.

(1) $A_n(E - C)$ を B と C を用いて表せ. ここで E は2次の単位行列とする.

(2) B と C を

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とするとき, A_{3n} を求めよ.

2 点 O で交わる2つの半直線 OX, OY があって $\angle XOY = 60^\circ$ とする. 2点 A, B が OX 上に O, A, B の順に, また, 2点 C, D が OY 上に O, C, D の順に並んでいるとして, 線分 AC の中点を M , 線分 BD の中点を N とする. 線分 AB の長さを s , 線分 CD の長さを t とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 線分 MN の長さを s と t を用いて表せ.

(2) 点 A, B と C, D が, $s^2 + t^2 = 1$ を満たしながら動くとき, 線分 MN の長さの最大値を求めよ.

3 N を2以上の自然数とする.

(1) 関数 $f(x) = (N - x) \log x$ を $1 \leq x \leq N$ の範囲で考える. このとき, 曲線 $y = f(x)$ は上に凸であり, 関数 $f(x)$ は極大値を1つだけとる. このことを示せ.

(2) 自然数の列 $a_1, a_2, \dots, a_N$ を

$$a_n = n^{N-n} \quad (n = 1, 2, \dots, N)$$

で定める. $a_1, a_2, \dots, a_N$ のうちで最大の値を M とし, $M = a_n$ となる n の個数を k とする. このとき $k \leq 2$ であることを示せ.

(3) (2) で $k = 2$ となるのは, N が2のときだけであることを示せ.

4 t を負の実数とし, xy 平面上で曲線 $y = 2^{2x+2t}$ と曲線 $y = 2^{x+3t}$ および y 軸で囲まれる部分を D とする.

(1) D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 $V(t)$ を求めよ.

(2) t が負の実数の範囲を動くとき, $V(t)$ の最大値を求めよ.

5 1 枚の硬貨を繰り返し投げる反復試行を行い, 表が 500 回続けて出たときに終わるものとする. n を 500 回以上の自然数とすると, この反復試行が n 回目で終わる確率を $p(n)$ とする.

(1) $501 \leq n \leq 1000$ のとき, $p(n)$ は n に関係なく一定の値になることを示し, またその値を求めよ.

(2) $p(1002) - p(1001)$ の値を求めよ.

(3) $1002 \leq n \leq 1500$ のとき, $p(n+1) - p(n)$ の値を求めよ.

解答例

1 (1) $A_n = B + A_{n-1}C$ より

$$\begin{aligned} A_n(E - C) &= (B + A_{n-1}C)(E - C) \\ &= A_{n-1}C(E - C) + B - BC \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad A_n(E - C) - B = \{A_{n-1}(E - C) - B\}C$$

$$\text{ゆえに} \quad A_n(E - C) - B = \{A_0(E - C) - B\}C^n = -BC^n$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{A_n(E - C) = B(E - C^n)}$$

(2) $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ にハミルトン・ケーリーの定理を適用すると

$$C^2 - 2C + 4E = O$$

$$\text{ゆえに} \quad (C + 2E)(C^2 - 2C + 4E) = O \quad \text{すなわち} \quad C^3 = -8E$$

上式および (1) の結果から

$$A_{3n}(E - C) = B(E - C^{3n}) = \{1 - (-8)^n\}B$$

$$(E - C)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{であるから}$$

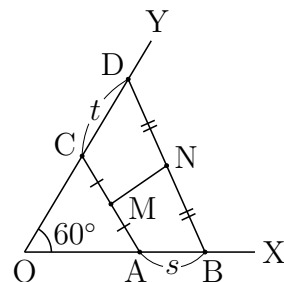
$$\begin{aligned} A_{3n} &= \{1 - (-8)^n\}B(E - C)^{-1} \\ &= \frac{1 - (-8)^n}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1 - (-8)^n}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

- 2 (1) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$ とすると

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) \\ &= \frac{1}{2}\{(\vec{a} + \vec{u}) + (\vec{c} + \vec{v})\}\end{aligned}$$



したがって

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\{(\vec{a} + \vec{u}) + (\vec{c} + \vec{v})\} - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$$

$$|\vec{u}| = s, |\vec{v}| = t, \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos 60^\circ = \frac{1}{2}st \text{ より}$$

$$MN = |\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\vec{u} + \vec{v}| = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2} = \frac{1}{2}\sqrt{s^2 + st + t^2}$$

$$(2) s^2 + t^2 = 1 \text{ より } st = \frac{1}{2}\{s^2 + t^2 - (s - t)^2\} = \frac{1}{2}\{1 - (s - t)^2\}$$

$$\text{したがって } s^2 + st + t^2 = \frac{1}{2}\{3 - (s - t)^2\} \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{上式および (1) の結果から } MN \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{よって, 求める最大値は } \frac{\sqrt{6}}{4}$$

別解 相加平均・相乗平均の大小関係により

$$1 = s^2 + t^2 \geq 2\sqrt{s^2 t^2} \quad \text{ゆえに} \quad st \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{したがって } s^2 + st + t^2 \leq \frac{3}{2} \quad \text{よって} \quad MN \leq \frac{\sqrt{6}}{4}$$



- 3** (1) $f(x) = (N - x) \log x$ より $(1 \leq x \leq N)$

$$f'(x) = -\log x + \frac{N}{x} - 1, \quad f''(x) = -\frac{1}{x} - \frac{N}{x^2} < 0$$

上の第2式から, $y = f(x)$ は上に凸である. また, $N \geq 2$ に注意して

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f'(x) = N - 1 > 0, \quad \lim_{x \rightarrow N-0} f'(x) = -\log N < 0$$

$f''(x) < 0$ より, $f'(x)$ は単調減少であるから, $f'(a) = 0$ を満たす a がただ一つ存在する. これから, $f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	1	$\cdots$	a	$\cdots$	N
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

よって, 関数 $f(x)$ は極大値を1つだけとる.

- (2) $M = n^{N-n}$ とすると $\log M = (N - n) \log n = f(n)$
 $f(x)$ のグラフから, $f(n) = \log M$ を満たす n の個数は2個以下である.
- (3) $k = 2$ となるのは, $M = a_m = a_{m+1}$ を満たす自然数 m ($1 \leq m \leq N - 1$) が存在するときであるから

$$m^{N-m} = (m+1)^{N-m-1} \quad \cdots (*)$$

$m \geq 2$ のとき, m と $m+1$ は互いに素であるから, 素因数分解の一意性により $(*)$ は成立しない. したがって, $m = 1$ のとき, $(*)$ は

$$1 = 2^{N-2} \quad \text{これを解いて} \quad N = 2$$



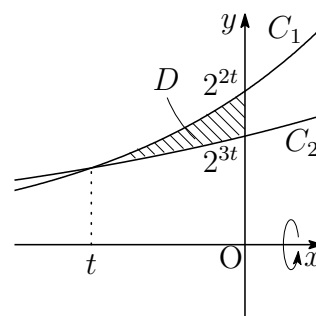
4 (1) 与えられた2曲線を

$$C_1 : y = 2^{2x+2t}, \quad C_2 : y = 2^{x+3t}$$

とおく.

$2x + 2t \geq x + 3t$, すなわち, $x \geq t$ のとき

$$2^{2x+2t} \geq 2^{x+3t}$$



$t < 0$ より, 区間 $t \leq x \leq 0$ において, C_1 は C_2 の上側にあるから

$$\begin{aligned} \frac{V(t)}{\pi} &= \int_t^0 \{(2^{2x+2t})^2 - (2^{x+3t})^2\} dx \\ &= \int_t^0 (2^{4x+4t} - 2^{2x+6t}) dx \\ &= \left[\frac{2^{4x+4t}}{4 \log 2} - \frac{2^{2x+6t}}{2 \log 2} \right]_t^0 \\ &= \frac{2^{8t} - 2 \cdot 2^{6t} + 2^{4t}}{4 \log 2} = \frac{(2^{4t} - 2^{2t})^2}{4 \log 2} \end{aligned}$$

よって
$$V(t) = \frac{\pi(2^{4t} - 2^{2t})^2}{4 \log 2}$$

(2) $u = 2^{2t}$ とおくと ($t < 0$) $0 < u < 1$

$$f(u) = 2^{4t} - 2^{2t} = u^2 - u = \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

したがって $-\frac{1}{4} \leq f(u) < 0$ ゆえに $0 < \{f(u)\}^2 \leq \frac{1}{16}$

$$V(t) = \frac{\pi \{f(u)\}^2}{4 \log 2} \text{ であるから } 0 < V(t) \leq \frac{\pi}{64 \log 2}$$

よって, 求める最大値は
$$\frac{\pi}{64 \log 2}$$

■

- 5 (1) $501 \leq n \leq 1000$ のとき, $n - 500$ 回目に裏が出て $n - 499$ 回目から n 回目まで続けて 500 回表が出る確率である. このとき, 1 回目から $n - 501$ 目までに表裏の出方に関係なく

$$p(n) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{500} = \frac{1}{2^{501}}$$

- (2) n 回目に初めて 500 回続けて表が出る事象を A_n とする. $p(1001)$ は, A_{500} となる事象を除き, 501 回目に裏が出て, 502 回目から 1001 回目まで続けて 500 回表が出る事象の確率であるから

$$p(1001) = (1 - p(500)) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{500}$$

$p(1002)$ は, A_{500} および A_{501} となる事象を除き, 502 回目に裏が出て, 503 回目から 1002 回目まで続けて 500 回表が出る事象の確率であるから

$$p(1002) = (1 - p(500) - p(501)) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{500}$$

上の 2 式および (1) の結果から

$$p(1002) - p(1001) = -p(501) \cdot \frac{1}{2^{501}} = -\frac{1}{2^{501}} \cdot \frac{1}{2^{501}} = -\frac{1}{2^{1002}}$$

- (3) $1002 \leq n \leq 1500$ のとき, $p(n)$ は, $A_{500}, A_{501}, \dots, A_{n-501}$ となる事象を除き, $n - 500$ 回目に裏が出て, $n - 499$ 回目から n 回目まで続けて 500 回表が出る事象の確率であるから

$$p(n) = \left\{ 1 - \sum_{k=500}^{n-501} p(k) \right\} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{500}$$

上式と同様に

$$p(n+1) = \left\{ 1 - \sum_{k=500}^{n-500} p(k) \right\} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{500}$$

上の 2 式と (1) の結果により

$$\begin{aligned} p(n+1) - p(n) &= -p(n-500) \cdot \frac{1}{2^{501}} \\ &= -\frac{1}{2^{501}} \cdot \frac{1}{2^{501}} = -\frac{1}{2^{1002}} \end{aligned}$$

■