

平成18年度 大阪大学 2次試験前期日程(数学問題)150分  
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部 数I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5

1  $y = x \sin^2 x$  と直線  $y = x$  の共有点のうち,  $x$  座標が正のものを,  $x$  座標が小さいものから順に  $A_1, A_2, A_3, \dots$  とし, 第  $n$  番目の点を  $A_n$  とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 点  $A_n$  の  $x$  座標を求めよ. また, 点  $A_n$  において, 曲線  $y = x \sin^2 x$  と直線  $y = x$  は接していることを示せ.
- (2) 線分  $A_n A_{n+1}$  と曲線  $y = x \sin^2 x$  で囲まれる部分の面積を求めよ.

2 直線  $y = x$  を  $l$  で, 直線  $y = -x$  を  $l'$  で表す. 直線  $l, l'$  のどちらの上にもない点  $A(a, b)$  をとる. 点  $A$  を通る直線  $m$  が2直線  $l, l'$  とそれぞれ点  $P, P'$  で交わるとする. 点  $Q$  を

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OQ}$$

を満たすようにとる. ただし,  $O$  は  $xy$  平面の原点である. 直線  $m$  を変化させるとき, 点  $Q$  の軌跡は  $l$  と  $l'$  を漸近線とする双曲線となることを示せ.

3  $x, y$  を変数とする.

- (1)  $n$  を自然数とする. 次の等式が成り立つように定数  $a, b$  を定めよ.

$$\begin{aligned} & \frac{n+1}{y(y+1)\cdots(y+n)(y+n+1)} \\ &= \frac{a}{y(y+1)\cdots(y+n)} + \frac{b}{(y+1)(y+2)\cdots(y+n+1)} \end{aligned}$$

- (2) すべての自然数  $n$  について, 次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{{}_n C_r}{x+r}$$

4 三角形  $OAB$  の辺  $OA, OB$  上に, それぞれ点  $P, Q$  をとり

$$\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OQ} = b\overrightarrow{OB} \quad (0 < a < 1, 0 < b < 1)$$

とする. 三角形  $OAB$  の重心  $G$  が三角形  $OPQ$  の内部に含まれるための必要十分条件を  $a, b$  を用いて表せ. また, その条件を満たす点  $(a, b)$  はどのような範囲にあるかを座標平面上に図示せよ. ただし, 三角形  $OPQ$  の辺上の点は, 三角形  $OPQ$  の内部に含まれないと考える.

- 5** 一辺の長さが1の正方形 ABCD の辺 BC, CD, DA, AB 上に, それぞれ点 P, Q, R, S を

$$\angle APB = \angle QPC, \quad \angle PQC = \angle RQD, \quad \angle QRD = \angle SRA$$

となるようにとる. ただし, 点 P, Q, R, S は, どれも正方形 ABCD の頂点とは一致しないものとする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 線分 BP の長さ  $t$  のとりうる値の範囲を求めよ.
- (2) 直線 AP と直線 RS の交点を T とする. 四角形 PQRT の面積を線分 BP の長さ  $t$  についての関数と考えて  $f(t)$  で表す.  $f(t)$  の最大値を求めよ.

## 解答例

- 1 (1)  $x > 0$  において曲線  $y = x \sin^2 x$  と直線  $y = x$  の共有点の  $x$  座標は

$$x \sin^2 x = x \quad \text{ゆえに} \quad x(\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$$

したがって、点  $A_n$  の  $x$  座標を  $x_n$  とすると  $x_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi$

$f(x) = x \sin^2 x$  とおくと、 $f'(x) = \sin^2 x + 2x \sin x \cos x$  であるから

$$f(x_n) = x_n, \quad f'(x_n) = 1$$

曲線  $y = x \sin^2 x$  は、直線  $y = x$  と点  $A_n$  で接している。

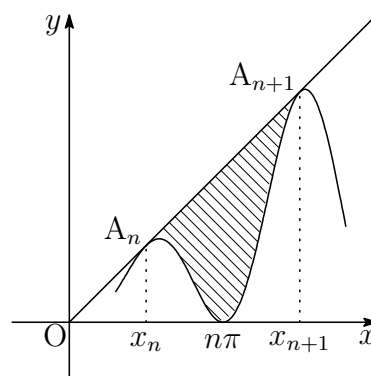
- (2) 求める面積を  $S$  とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x \sin^2 x) dx \\ &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left( \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \cos 2x \right) dx \\ &= \left[ \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x \right]_{x_n}^{x_{n+1}} \end{aligned}$$

$$x_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi, \quad x_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \quad \text{より}$$

$\sin 2x_n = \sin 2x_{n+1} = 0, \quad \cos 2x_n = \cos 2x_{n+1} = -1$  であるから

$$S = \frac{1}{4} \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 - \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \right\} = \frac{n\pi^2}{2}$$



**2** 直線  $m$  上の点  $A(a, b)$  は 2 直線  $l: y = x$ ,  $l': y = -x$  上にないから

$$a^2 - b^2 \neq 0$$

(i) 直線  $m$  の傾きを  $t$  とすると, その方程式は

$$y - b = t(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = tx - at + b \quad (t \neq \pm 1)$$

$m$  と  $l, l'$  との交点  $P, P'$  の座標は

$$P\left(\frac{at-b}{t-1}, \frac{at-b}{t-1}\right), \quad P'\left(\frac{at-b}{t+1}, -\frac{at-b}{t+1}\right)$$

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OQ} \quad \text{より} \quad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OQ} = (x, y) \quad \text{とおくと}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{at-b}{t-1} + \frac{at-b}{t+1} - a = \frac{at^2 - 2bt + a}{t^2 - 1}, \\ y &= \frac{at-b}{t-1} - \frac{at-b}{t+1} - b = \frac{-bt^2 + 2at - b}{t^2 - 1} \end{aligned}$$

上の 2 式から

$$\begin{aligned} x + y &= \frac{(a-b)(t^2 + 2t + 1)}{t^2 - 1} = \frac{(a-b)(t+1)}{t-1} \\ x - y &= \frac{(a+b)(t^2 - 2t + 1)}{t^2 - 1} = \frac{(a+b)(t-1)}{t+1} \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad (x+y)(x-y) = (a+b)(a-b)$$

$$\text{すなわち} \quad x^2 - y^2 = a^2 - b^2 \quad \dots (*)$$

(ii)  $m$  が  $y$  軸と平行であるとき,  $m$  と  $l, l'$  の交点  $P, P'$  の座標は

$$P(a, a), \quad P'(a, -a)$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OA} = (a, -b) \quad \text{ゆえに} \quad Q(a, -b)$$

このとき,  $Q$  は曲線  $(*)$  上にある.

(i), (ii) より, 点  $Q$  の軌跡は,  $l, l'$  を漸近線とする双曲線

$$x^2 - y^2 = a^2 - b^2$$

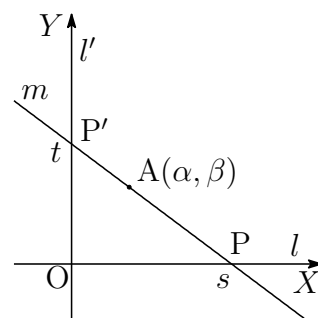
である.

別解  $xy$  系から  $XY$  系への直交変換を

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で定義すると  $x = X - Y$ ,  $y = X + Y$

$$\text{ゆえに } X = \frac{x+y}{2}, Y = \frac{-x+y}{2}$$



$m$  が  $O$  を通らないとき,  $XY$  系において,  $P(s, 0)$ ,  $P'(0, t)$ ,  $A(\alpha, \beta)$  とおくと

$$\alpha = \frac{a+b}{2}, \quad \beta = \frac{-a+b}{2}$$

直線  $PP'$ :  $\frac{X}{s} + \frac{Y}{t} = 1$  上に点  $A(\alpha, \beta)$  があるから

$$\frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{t} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad st - \beta s - \alpha t = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OQ}$  より,  $\overrightarrow{OQ} = (X, Y)$  とおくと

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OA} \\ &= \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s - \alpha \\ t - \beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって  $XY = (s - \alpha)(t - \beta) = st - \beta s - \alpha t + \alpha\beta$

これに  $\textcircled{1}$  を代入すると

$$XY = \alpha\beta$$

上の点  $Q$  の軌跡の方程式を  $xy$  系で表すと

$$\frac{x+y}{2} \cdot \frac{-x+y}{2} = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{-a+b}{2} \quad \text{すなわち} \quad x^2 - y^2 = a^2 - b^2 \quad \cdots (*)$$

点  $A$  は  $l, l'$  上にないから,  $a^2 - b^2 \neq 0$  である. よって, 点  $Q$  の表す軌跡は,  $l, l'$  を漸近線とする直角双曲線  $(*)$  である.

$m$  が  $O$  を通るとき,  $P = P' = O$  となり,  $\overrightarrow{OQ} = -\overrightarrow{OA}$  より,  $xy$  系における点  $Q(-a, -b)$  は  $(*)$  を満たす.

補足 なお,  $xy$  系から  $XY$  系への正規直交変換は次のように行う.

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{X}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{Y}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\boxed{3} \quad (1) \quad \frac{n+1}{y(y+1)\cdots(y+n)(y+n+1)} = \frac{(y+n+1)-y}{y(y+1)\cdots(y+n)(y+n+1)} \\ = \frac{1}{y(y+1)\cdots(y+n)} + \frac{-1}{(y+1)(y+2)\cdots(y+n+1)}$$

よって  $\mathbf{a = 1, b = -1}$

(2) 定数  $a_r$  ( $r = 0, 1, \dots, n$ ) を用いて次の部分分数式を考える.

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{r=0}^n \frac{a_r}{x+r} \quad (\text{A})$$

$n$  次の整式  $f_r(x)$  を

$$f_r(x) = x(x+1)\cdots(x+r-1) \times (x+r+1)(x+r+2)\cdots(x+n)$$

とおく. (\*) の両辺に  $x(x+1)\cdots(x+n)$  を掛けると

$$n! = \sum_{r=0}^n a_r f_r(x) \quad (\text{B})$$

上式に  $x = -r$  を代入すると

$$n! = a_r f_r(-r) = a_r \cdot (-r)(-r+1)\cdots(-1) \times 1 \cdot 2 \cdots (n-r) \\ = a_r (-1)^r r! (n-r)!$$

したがって

$$a_r = \frac{n!}{(-1)^r r! (n-r)!} = (-1)^r {}_n C_r \quad (\text{C})$$

(B) は  $x = 0, 1, \dots, n$  の異なる  $n+1$  個の値について成立するから, (B) はすべての  $x$  について成立する.

(C) を (A) に代入すると

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{{}_n C_r}{x+r}$$

■

- 4 (1)  $\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OQ} = b\overrightarrow{OB}$  より ( $0 < a < 1$ ,  $0 < b < 1$ )

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{1}{3a}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{3b}\overrightarrow{OQ}\end{aligned}$$

重心  $G$  が  $\triangle OPQ$  の内部に含まれるための  
必要十分条件は

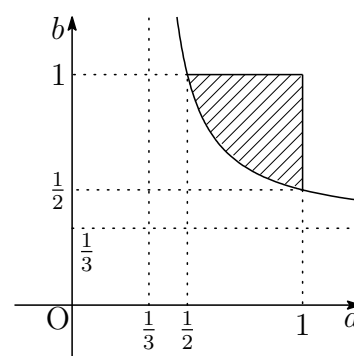
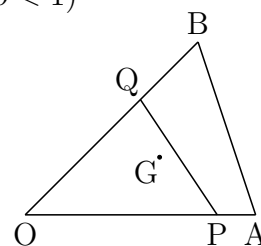
$$\frac{1}{3a} > 0, \quad \frac{1}{3b} > 0, \quad \frac{1}{3a} + \frac{1}{3b} < 1$$

したがって  $0 < a < 1$ ,  $0 < b < 1$ ,  $ab - \frac{a}{3} - \frac{b}{3} > 0$

求める条件は

$$\begin{aligned}0 < a < 1, \quad 0 < b < 1, \\ \left(a - \frac{1}{3}\right) \left(b - \frac{1}{3}\right) > \frac{1}{9}\end{aligned}$$

よって, 点  $(a, b)$  の表す領域は, 右の図の斜  
線部分で境界線は含まない.



- 5 (1) 正方形 ABCD を右の図のように座標平面上におくと,  $BP = t$  より直線 AP の傾きは  $t$  で, 直線 PQ は点  $(1, t)$  を通り傾き  $-t$  の直線であるから

$$PQ : y - t = -t(x - 1)$$

直線 PQ と直線 CD との交点 Q は  $\left(2 - \frac{1}{t}, 1\right)$

直線 QR は点 Q を通り傾き  $t$  の直線であるから

$$QR : y - 1 = t\left(x - 2 + \frac{1}{t}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = tx + 2 - 2t$$

直線 RS は点  $R(0, 2 - 2t)$  を通り, 傾き  $-t$  の直線であるから

$$RS : y = -tx + 2 - 2t$$

直線 RS と直線 AB :  $y = 0$  と交点 S は  $\left(\frac{2}{t} - 2, 0\right)$

P, Q, R, S は, それぞれ両端を除く辺 BC, CD, DA, AB 上にあるから

$$0 < t < 1, \quad 2 - \frac{1}{t} < 1, \quad 0 < 2 - 2t < 1, \quad 0 < \frac{2}{t} - 2 < 1$$

これらを同時に満たす  $t$  の値の範囲は  $\frac{2}{3} < t < 1$

- (2) 四角形 PQRT は平行四辺形であるから

$$\overrightarrow{QP} = \left(\frac{1-t}{t}, 1-t\right), \quad \overrightarrow{QR} = \left(\frac{1-2t}{t}, 2t-1\right)$$

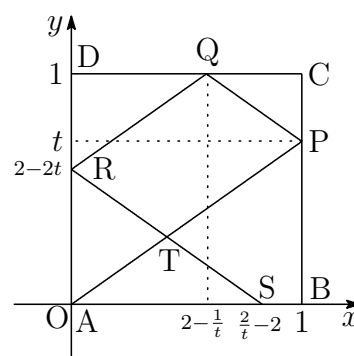
$$\begin{aligned} t \text{ の値の範囲により } f(t) &= \left| \frac{1-t}{t}(2t-1) - (1-t) \cdot \frac{1-2t}{t} \right| \\ &= \frac{2(1-t)(2t-1)}{t} = 6 - 2\left(2t + \frac{1}{t}\right) \end{aligned}$$

相加平均・相乗平均の大小関係により  $2t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{2t \cdot \frac{1}{t}} = 2\sqrt{2}$

上式において, 等号が成立するとき  $2t = \frac{1}{t}$  すなわち  $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$

これは, (1) の結果を満たしている.

よって, 求める最大値は  $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 6 - 2 \cdot 2\sqrt{2} = 6 - 4\sqrt{2}$



解説 下の図において,

$$\triangle PCQ \equiv \triangle PCQ', \quad \triangle QDR \equiv \triangle Q'D'R', \quad \triangle RAS \equiv \triangle R'A'S'$$

(1) の条件を満たすとき,  $S'$  は, 両端を除く線分  $A'B'$  上にあればよい.

よって  $\frac{2}{3} < t < 1$

