

平成16年度 大阪大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部 数I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5

1 n を自然数とする.

(1) n 個の複素数 z_k ($k = 1, 2, \dots, n$) が

$$0 \leq \arg z_k \leq \frac{\pi}{2}$$

をみたすならば, 不等式

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2 \leq |z_1 + z_2 + \dots + z_n|^2$$

が成り立つことを示せ.

(2) n 個の実数 θ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) が

$$0 \leq \theta_k \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{かつ} \quad \cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \dots + \cos \theta_n = 1$$

をみたすならば, 不等式

$$\sqrt{n-1} \leq \sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \dots + \sin \theta_n$$

が成り立つことを示せ.

2 素数 p, q に対して

$$a_n = p^n - 4(-q)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって整数 a_n を定める. ただし, $p > 2q$ とする.

(1) a_1 と a_2 が 1 より大きい公約数 m をもつならば, $m = 3$ であることを示せ.

(2) a_n がすべて 3 の倍数であるような p, q のうちで積 pq が最小となるものを求めよ.

3 n を 3 以上の自然数とする. 点 O を中心とする半径 1 の円において, 円周を n 等分する点 $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$ を時計回りにとる. 各 $i = 1, 2, \dots, n$ に対して, 直線 OP_{i-1}, OP_i とそれぞれ点 P_{i-1}, P_i で接するような放物線を C_i とする. ただし, $P_n = P_0$ とする. 放物線 $C_1, C_2, \dots, C_n$ によって囲まれる部分の面積を S_n とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ.

4 実数 a, r に対し数列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_1 = a, \\ x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

で定める.

- (1) すべての n について $x_n = a$ となるような a を求めよ.
- (2) $x_2 \neq a, x_3 = a$ となるような a の個数を求めよ.
- (3) $0 \leq a \leq 1$ となるすべての a について $0 \leq x_n \leq 1$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) が成り立つような r の範囲を求めよ.

5 座標平面上に直線 $l: x \sin \theta + y \cos \theta = 1$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) がある. 不等式 $x \geq 0, y \geq 0, x \sin \theta + y \cos \theta \geq 1$ が表す領域を D , 不等式 $x \geq 0, y \geq 0, x \sin \theta + y \cos \theta \leq 1$ が表す領域を D' とする.

D 内に半径 R の 2 つの円 C_1, C_2 を, C_1 は l と y 軸に接し, C_2 は l と x 軸に接し, さらに C_1 と C_2 が外接するようにとる. また D' 内に半径 r の 2 つの円 C'_1, C'_2 を, C'_1 は l と y 軸に接し, C'_2 は l と x 軸に接し, さらに C'_1 と C'_2 が外接するようにとる.

- (1) $\frac{r}{R}$ を θ で表せ.
- (2) θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, $\frac{r}{R}$ のとりうる値の範囲を求めよ.

解答例

1 (1) $0 \leq \arg z_k \leq \frac{\pi}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}
 |z_1 + z_2 + \cdots + z_n|^2 &= \sum_{k=1}^n |z_k|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (z_i \overline{z_j} + \overline{z_i} z_j) \\
 &= \sum_{k=1}^n |z_k|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i| |z_j| \cos(\arg z_i - \arg z_j) \\
 &\geq |z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2
 \end{aligned}$$

(2) (1) の結果に $z_k = \cos \theta_k$ を代入すると、与えられた条件から

$$\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cdots + \cos^2 \theta_n \leq |\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cdots + \cos \theta_n|^2 = 1$$

$$\text{したがって} \quad \sum_{k=1}^n (1 - \sin^2 \theta_k) \leq 1 \quad \text{ゆえに} \quad n - 1 \leq \sum_{k=1}^n \sin^2 \theta_k$$

$$0 \leq \theta_k \leq \frac{\pi}{2} \text{ について, } \sin \theta_k \geq 0 \text{ であるから } (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$\sum_{k=1}^n \sin^2 \theta_k \leq (\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \cdots + \sin \theta_n)^2$$

$$\text{よって} \quad \sqrt{n-1} \leq \sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \cdots + \sin \theta_n$$



- 2** (1) $a_1 = p + 4q$, $a_2 = p^2 - 4q^2 = (p + 4q)(p - 4q) + 12q^2$ より

$$a_2 - a_1(p - 4q) = 12q^2$$

a_1 と a_2 が公約数 m をもつとき ($m > 1$), m は $12q^2$ の公約数である.

$$(*) \quad a_1 - 4q = p$$

- (i) m が 2 を因数にもつと仮定すると, $(*)$ の左辺は 2 を因数にもつから, 素数 p は, $p = 2$ となる. これは, $p > 2q$ に反するから, 不適.
- (ii) m が q を因数にもつと仮定すると, $(*)$ の左辺は q を因数にもつから, 素数 p は, $p = q$ となる. これは, $p > 2q$ に反するから, 不適.

よって, a_1 と a_2 が公約数 m ($m > 1$) をもつならば, $m = 3$

- (2) a_n がすべて 3 の倍数であるとき, 法 3 に関して

$$a_1 = p + 4q \equiv p + q \pmod{3}$$

$$a_n = p^n - 4(-q)^n \equiv p^n - (-q)^n = (p + q) \sum_{k=1}^n p^{n-k} (-q)^{k-1} \pmod{3}$$

$p + q$ が 3 の倍数で, pq が最小となるものは ($p > 2q$)

$$q = 2 \text{ のとき } \quad p = 7 \text{ より } \quad pq = 14$$

$$q \geq 3 \text{ のとき } \quad pq > 2q^2 \geq 18$$

よって $\quad \mathbf{p = 7, q = 2}$ ■

3 $\theta = \frac{\pi}{n}$, $\angle P_0OP_1 = 2\theta$, $P_0(-\sin \theta, \cos \theta)$, $P_1(\sin \theta, \cos \theta)$ とする.

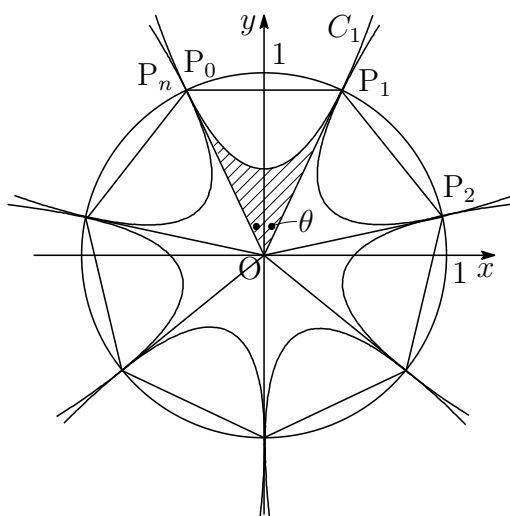
2点 P_0, P_1 を通る放物線 C_1 の方程式を

$$y = a(x + \sin \theta)(x - \sin \theta) + \cos \theta$$

とおくと $y' = 2ax$

C_1 の点 P_1 における接線の傾きが, 直線 OP_1 の傾きに等しいから

$$2a \sin \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{\cos \theta}{2 \sin^2 \theta}$$



直線 P_0P_1 と放物線 C_1 で囲まれた部分の面積は

$$\begin{aligned} -a \int_{-\sin \theta}^{\sin \theta} (x + \sin \theta)(x - \sin \theta) dx &= \frac{1}{6} a (2 \sin \theta)^3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{\cos \theta}{2 \sin^2 \theta} (2 \sin \theta)^3 \\ &= \frac{2}{3} \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3} \sin 2\theta \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\text{また } \triangle OP_0P_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \theta \cdot \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta \quad \cdots \textcircled{2}$$

図の斜線分の面積は $\frac{S_n}{n}$ であるから, ①, ② より

$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{2} \sin 2\theta - \frac{1}{3} \sin 2\theta = \frac{1}{6} \sin 2\theta \quad \text{ゆえに} \quad S_n = \frac{n}{6} \sin \frac{2\pi}{n}$$

$$\text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{6} \sin \frac{2\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{3} \cdot \frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{3}$$

■

$$\boxed{4} \quad (1) \quad (*) \begin{cases} x_1 = a, \\ x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

$a = 0$ のとき, $(*)$ より, すべての n について $a_n = 0$

$a \neq 0$ のとき, すべての n について $x_n = a$ となるとき

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) = a \neq 0$$

上式から, $r \neq 0$, $x_n \neq 0$, 1 であるから

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = r(1 - x_n) = 1 \quad \text{ゆえに} \quad a = x_n = \frac{r-1}{r}$$

$$\text{よって} \quad a = 0, \frac{r-1}{r}$$

(2) $x_2 = b$ とおくと ($b \neq a$), $(*)$ により

$$b = ra(1 - a), \quad a = rb(1 - b)$$

上の 2 式の辺々の和と差をとると

$$a + b = r\{a + b - (a + b)^2 + 2ab\} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$b - a = r(b - a)(a + b - 1)$$

$b - a \neq 0$ であるから, 上の第 2 式から, $r \neq 0$ に注意して

$$1 = r(a + b - 1) \quad \text{ゆえに} \quad a + b = \frac{r+1}{r} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ から} \quad ab = \frac{1}{2r}(a + b)\{r(a + b) - r + 1\}$$

$$\textcircled{2} \text{ をこれに代入して} \quad ab = \frac{r+1}{r^2} \quad \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ から, a , b を解とする 2 次方程式は

$$t^2 - \frac{r+1}{r}t + \frac{r+1}{r^2} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad rt^2 - (r+1)t + \frac{r+1}{r} = 0$$

この方程式の判別式を D とすると

$$D = (r+1)^2 - 4(r+1) = (r+1)(r-3)$$

D の符号および a, b の交代により ($r \neq 0$)

$D > 0$ すなわち $r < -1, 3 < r$ のとき 2個

$D = 0$ すなわち $r = -1, 3$ のとき, $a = b$ より 0個

$D < 0$ すなわち $-1 < r < 0, 0 < r < 3$ のとき 0個

なお, $r = 0$ のとき, $x_2 = x_3 = 0$ となり, 0個

よって $r < -1, 3 < r$ のとき 2個

$-1 \leq r \leq 3$ のとき 0個

(3) $f(x) = rx(1-x)$ とおくと, $0 \leq x \leq 1$ のとき, $0 \leq f(x) \leq 1$ を満たせば
よいから

$$0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4} \text{ より } 0 \leq \frac{1}{4}r \leq 1$$

これを解いて $0 \leq r \leq 4$

補足 本題はロジスティック写像 (Logistic map) をテーマとした出題である¹. ■

¹<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-ri-2006.pdf> [5] を参照

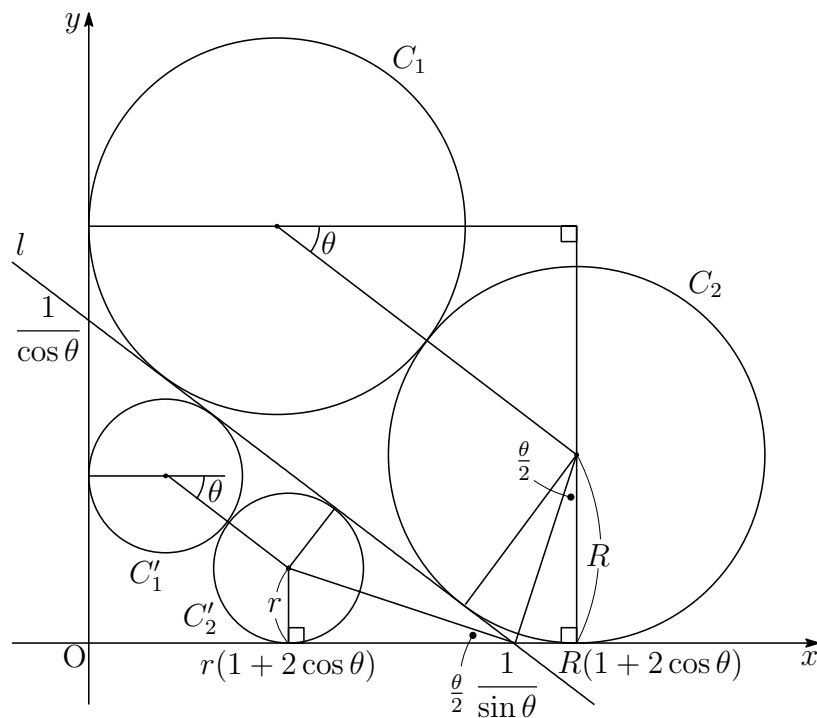
- 5 (1) 直線 l の x 軸との交点の x 座標 $\frac{1}{\sin \theta}$ に注目すると

$$r(1 + 2 \cos \theta) + r \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = R(1 + 2 \cos \theta) - R \tan \frac{\theta}{2}$$

上式の両辺に $\sin \theta$ を掛けると

$$r(\sin \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos \theta + 1) = R(\sin \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos \theta - 1)$$

よって
$$\frac{r}{R} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta + \sin \theta + \cos \theta - 1}{2 \sin \theta \cos \theta + \sin \theta + \cos \theta + 1}$$



- (2) $t = \sin \theta + \cos \theta$ とおくと $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$$t = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{ゆえに} \quad 1 < t \leq \sqrt{2}$$

(1) の結果から
$$\frac{r}{R} = \frac{t^2 + t - 2}{t^2 + t} = 1 - \frac{2}{t^2 + t}$$

$$t^2 + t = \left(t + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \quad \text{より} \quad (1 < t \leq \sqrt{2}) \quad 2 < t^2 + t \leq 2 + \sqrt{2}$$

したがって
$$1 - \frac{2}{2} < \frac{r}{R} \leq 1 - \frac{2}{2 + \sqrt{2}} \quad \text{よって} \quad 0 < \frac{r}{R} \leq \sqrt{2} - 1 \quad \blacksquare$$