

平成 15 年度 大阪大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 150 分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部 数 I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5

- 1 a を正の実数, $w = a(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ)$ とする. ただし i は虚数単位である.
また, 複素数の列 $\{z_n\}$ を $z_1 = w$, $z_{n+1} = z_n w^{2n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$) で定める.

- (1) z_n が実数になるための必要十分条件は n が 6 の倍数であることを示せ.
(2) 複素数平面で原点を O とし z_n を表す点を P_n とする. $1 \leq n \leq 17$ であるような n について, $\triangle OP_n P_{n+1}$ が直角二等辺三角形となるような n と a を求めよ.

- 2 (1) $0 < t < 1$ のとき, 不等式

$$\frac{\log t}{2} < -\frac{1-t}{1+t}$$

が成り立つことを示せ.

- (2) k を正の定数とする. $a > 0$ とし, 曲線 $C: y = e^{kx}$ 上の 2 点 $P(a, e^{ka})$, $Q(-a, e^{-ka})$ を考える. このとき P における C の接線と Q における C の接線の交点の x 座標は常に正であることを示せ.

- 3 (1) $f(x)$ を x の整式とし, $\{a_k\}$ は $a_k < a_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots$) および $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty$ をみたす数列とする. このとき

$$f(a_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

ならば $f(x)$ は整式として 0 であることを示せ.

- (2) $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ を x の整式とし

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x) \sin x + f_3(x) \sin 2x$$

はすべての実数 x に対して 0 であるとする. このとき $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ はいずれも整式として 0 であることを示せ.

4 数列 $\{a_k\}$ が $a_k < a_{k+1}$ ($k = 1, 2, \dots$) および

$$a_{k\ell} = a_k + a_\ell, \quad k = 1, 2, \dots, \ell = 1, 2, \dots$$

をみたすとする.

(1) k, ℓ を 2 以上の自然数とする. 自然数 n が与えられたとき

$$\ell^{m-1} \leq k^n < \ell^m$$

をみたす自然数 m が存在することを示せ.

(2) k, ℓ を 2 以上の自然数とするとき

$$-\frac{1}{n} < \frac{a_k}{a_\ell} - \frac{\log k}{\log \ell} < \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

が成り立つことを示せ.

(3) $a_2 = a$ とするとき, 数列 $\{a_k\}$ の一般項を求めよ.

- 5** (1) 平面上において座標軸に平行な主軸 (長軸, 短軸) をもち, x 軸, y 軸の両方に接する楕円を考える. その中心の x 座標を a とする. このような楕円のうち点 $A(1, 2)$ を通るものが存在するための a の範囲を求めよ. ただし円は楕円の特別な場合とみなすものとする.
- (2) (1) の楕円がちょうど 2 つ存在するような a に対して, その 2 つの楕円の中心を B, C とする. $\triangle ABC$ の面積を $S(a)$ で表すときこの関数のグラフをかけ.

解答例

1 (1) $z_1 = w$, $z_{n+1} = z_n w^{2n+1}$ より ($n = 1, 2, \dots$)

$$n \geq 2 \text{ のとき } \prod_{k=1}^{n-1} \frac{z_{k+1}}{z_k} = \prod_{k=1}^{n-1} w^{2k+1} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{z_n}{z_1} = \prod_{k=1}^{n-1} w^{2k+1}$$

$$\text{したがって} \quad z_n = w \prod_{k=1}^{n-1} w^{2k+1} = \prod_{k=0}^{n-1} w^{2k+1} = w^{n^2}$$

上式は、 $n = 1$ のときも成立するから $z_n = w^{n^2}$ ($n = 1, 2, \dots$)

$$w = a(\cos 5^\circ + i \sin 5^\circ) \text{ より } z_n = a^{n^2} \{\cos(n^2 \cdot 5^\circ) + i \sin(n^2 \cdot 5^\circ)\}$$

z_n が実数になるための必要十分条件は $n^2 \cdot 5^\circ$ が 180° の倍数、すなわち、 n^2 が 36 の倍数であることである。

よって、 z_n が実数になるための必要十分条件は n が 6 の倍数である。

(2) (1) の結果から

$$\arg z_{n+1} - \arg z_n = (n+1)^2 \cdot 5^\circ - n^2 \cdot 5^\circ = (2n+1) \cdot 5^\circ,$$

$$\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \frac{a^{(n+1)^2}}{a^{n^2}} = a^{2n+1}$$

$$1 \leq n \leq 17 \text{ より } (2n+1) \cdot 5^\circ = 15^\circ, 25^\circ, 35^\circ, \dots, 175^\circ$$

これから、 $\triangle OP_n P_{n+1}$ が直角二等辺三角形であるとき

$$\angle P_n OP_{n+1} = (2n+1) \cdot 5^\circ = 45^\circ, \quad a^{2n+1} = 2^{\pm \frac{1}{2}}$$

上の第 1 式から $n = 4$ これを第 2 式に代入して $a = 2^{\pm \frac{1}{18}}$ ■

2 (1) $f(t) = -\frac{1-t}{1+t} - \frac{\log t}{2} = 1 - \frac{2}{1+t} - \frac{\log t}{2}$ とおくと

$$f'(t) = \frac{2}{(1+t)^2} - \frac{1}{2t} = -\frac{(1-t)^2}{2t(1+t)^2} < 0$$

$f(t)$ は単調減少で, $f(1) = 0$ であるから, $0 < t < 1$ において $f(t) > 0$

$$-\frac{1-t}{1+t} - \frac{\log t}{2} > 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\log t}{2} < -\frac{1-t}{1+t}$$

別解 $x > 0$ において $\frac{1}{2x} - \frac{2}{(1+x)^2} = \frac{(1-x)^2}{2x(1+x)^2} > 0$

$$\begin{aligned} 0 < t < 1 \text{ のとき } \int_t^1 \left\{ \frac{1}{2x} - \frac{2}{(1+x)^2} \right\} dx &= \left[\frac{\log x}{2} + \frac{2}{1+x} \right]_t^1 \\ &= -\frac{\log t}{2} - \frac{1-t}{1+t} > 0 \end{aligned}$$

よって, $0 < t < 1$ において $\frac{\log t}{2} < -\frac{1-t}{1+t}$

(2) $C: y = e^{kx}$ より $y' = ke^{kx}$

C 上の 2 点 $P(a, e^{ka})$, $Q(-a, e^{-ka})$ における接線の方程式は, それぞれ

$$\begin{aligned} y &= ke^{ka}(x-a) + e^{ka}, \\ y &= ke^{-ka}(x+a) + e^{-ka} \end{aligned}$$

これらの接線の交点の x 座標は

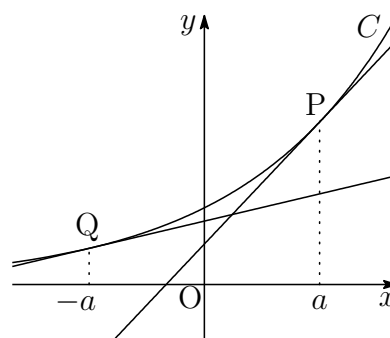
$$x = -\frac{1}{k} + \frac{a(e^{ka} + e^{-ka})}{e^{ka} - e^{-ka}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{x}{a} = -\frac{1}{ka} + \frac{1 + e^{-2ka}}{1 - e^{-2ka}} \quad (*)$$

$0 < e^{-2ka} < 1$ より ($k > 0, a > 0$), (1) の結果に $t = e^{-2ka}$ を代入すると

$$\frac{\log e^{-2ka}}{2} < -\frac{1 - e^{-2ka}}{1 + e^{-2ka}} \quad \text{ゆえに} \quad -\frac{1}{ka} > -\frac{1 + e^{-2ka}}{1 - e^{-2ka}} \quad (**)$$

(*), (**) より $\frac{x}{a} = -\frac{1}{ka} + \frac{1 + e^{-2ka}}{1 - e^{-2ka}} > 0$

よって, C 上の 2 点 P, Q における 2 接線の交点の x 座標は正である. ■



- 3** (1) 整式 $f(x)$ が, $a_k < a_{k+1}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \infty$ を満たす数列 $\{a_k\}$ に対して

$$f(a_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

が成立するから, $f(x)$ は, 無数の因数

$$x - a_1, x - a_2, \dots$$

をもつ. これは $f(x)$ の次数が有限であることに反する.

よって, $f(x)$ は整式として 0 である.

補足 定数 A を用いて $f(x) = A(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_k) \cdots$ であるから, $A \neq 0$ のとき, $f(x)$ の次数が有限であることに反する.

- (2) $a_k = k\pi$ として ($k = 1, 2, \dots$), $x = a_k$ を $F(x) = 0$ に代入すると

$$f_1(a_k) = 0$$

したがって, (1) の結論により $f_1(x) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$

$\textcircled{1}$ から

$$F(x) = f_2(x) \sin x + f_3(x) \sin 2x$$

とおき, $b_k = \frac{2k-1}{2}\pi$ として ($k = 1, 2, \dots$), $x = b_k$ を上式に代入すると

$$f_2(b_k) = 0$$

したがって, (1) の結論により $f_2(x) = 0 \quad \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ から

$$F(x) = f_3(x) \sin 2x$$

とおき, $c_k = \frac{2k-1}{4}\pi$ として ($k = 1, 2, \dots$), $x = c_k$ を上式に代入すると

$$f_3(c_k) = 0$$

したがって, (1) の結論により $f_3(x) = 0 \quad \dots \textcircled{3}$

$\textcircled{1} \sim \textcircled{3}$ から $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0$



- 4 (1) 自然数の列 $1, 2, \dots$ を, 2 以上の自然数 ℓ を用いて

$$| 1, 2, \dots, \ell - 1 | \ell, \ell + 1, \dots, \ell^2 - 1 | \ell^2, \ell^2 + 1, \dots, \ell^3 - 1 | \dots$$

からなる群数列の第 i 群を $A_i = \{\ell^{i-1}, \ell^{i-1} + 1, \dots, \ell^i - 1\}$ とおくと, 任意の自然数 N に対し, $N \in A_j$ となる自然数 j が存在する.

したがって, 自然数 k^n に対し, $k^n \in A_m$ となる自然数 m が存在し

$$\ell^{m-1} \leq k^n \leq \ell^m - 1 \quad \text{すなわち} \quad \ell^{m-1} \leq k^n < \ell^m$$

- (2) 漸化式 $a_{k\ell} = a_k + a_\ell$ に $k = \ell = 1$ を代入すると ($a_k < a_{k+1}$)

$$a_1 = a_1 + a_1 \quad \text{ゆえに} \quad a_1 = 0, \quad a_\ell > a_1 = 0 \quad (\ell = 2, 3, \dots)$$

k, ℓ を 2 以上の自然数とすると, (1) の結果により

$$a_{\ell^{m-1}} \leq a_{k^n} < a_{\ell^m} \quad \text{ゆえに} \quad (m-1)a_\ell \leq na_k < ma_\ell$$

$$\text{辺々を } na_\ell \text{ で割ると} \quad \frac{m}{n} - \frac{1}{n} \leq \frac{a_k}{a_\ell} < \frac{m}{n} \quad \dots \textcircled{1}$$

また, (1) の結果から $\log \ell^{m-1} \leq \log k^n < \log \ell^m$

$$(m-1) \log \ell \leq n \log k < m \log \ell \quad \text{ゆえに} \quad \frac{m}{n} - \frac{1}{n} \leq \frac{\log k}{\log \ell} < \frac{m}{n}$$

$$\text{辺々に } -1 \text{ を掛けると} \quad -\frac{m}{n} < -\frac{\log k}{\log \ell} \leq -\frac{m}{n} + \frac{1}{n} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② の辺々を加えると

$$-\frac{1}{n} < \frac{a_k}{a_\ell} - \frac{\log k}{\log \ell} < \frac{1}{n}$$

- (3) (1) で示した定数 k, ℓ に対して, $n \rightarrow \infty$ とすると, (2) の結果からはさみうちの原理により

$$\frac{a_k}{a_\ell} - \frac{\log k}{\log \ell} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a_k}{\log k} = \frac{a_\ell}{\log \ell} \quad \text{すなわち} \quad a_k = a_\ell \log_\ell k$$

上式において, $\ell = 2$ とすると, $a_2 = a$ より $a_k = a \log_2 k \quad \dots (*)$

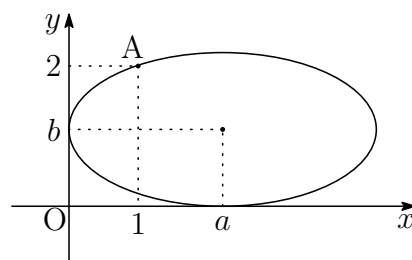
(*) は $k = 1$ のときも成立するから $a_k = a \log_2 k$ ■

- 5 (1) 楕円の中心を (a, b) とすると, x 軸, y 軸の両方に接する楕円の方程式は

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1$$

これが点 $A(1, 2)$ を通るから

$$\frac{(1-a)^2}{a^2} + \frac{(2-b)^2}{b^2} = 1$$



これを b について整理すると $(a-1)^2 b^2 - 4a^2 b + 4a^2 = 0 \quad \dots (*)$

b に関する 2 次方程式 $(*)$ の解 $b (\neq 0)$ をもつ条件を求めればよい.

(i) $a = 1$ のとき, $(*)$ は解 $b = 1$ をもつ (このとき円になる).

(ii) $a \neq 0, 1$ のとき, $(*)$ の係数について

$$D/4 = (-2a^2)^2 - (a-1)^2 \cdot 4a^2 = 4a^2(2a-1) \geq 0 \quad \text{これを解いて} \quad a \geq \frac{1}{2}$$

(i), (ii) より $a \geq \frac{1}{2}$

別解 $\frac{(1-a)^2}{a^2} + \frac{(2-b)^2}{b^2} = 1$ より $\frac{2a-1}{a^2} = \frac{(2-b)^2}{b^2} \geq 0$

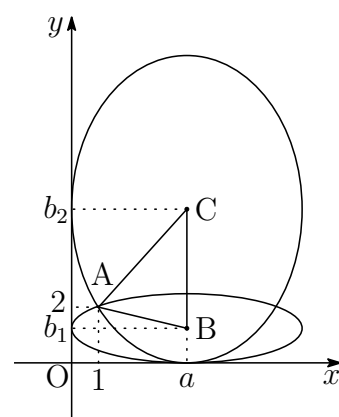
したがって $2a-1 \geq 0$ これを解いて $a \geq \frac{1}{2}$

- (2) (1) の結果から, 楕円がちょうど 2 つ存在するとき, $a > \frac{1}{2}$ ($a \neq 1$) である. このとき, b に関する 2 次方程式 $(*)$ を解くと

$$b = \frac{2a^2 \pm 2a\sqrt{2a-1}}{(a-1)^2}$$

これら 2 つの解を b_1, b_2 とすると ($b_1 < b_2$)

$$b_2 - b_1 = \frac{4a\sqrt{2a-1}}{(a-1)^2}$$



したがって, $\triangle ABC$ の面積 $S(a)$ は

$$S(a) = \frac{1}{2}|a-1|(b_2-b_1) = \frac{2a\sqrt{2a-1}}{|a-1|}$$

$\frac{1}{4}S(a)^2 = \frac{a^2(2a-1)}{(a-1)^2} = 2a + 3 + \frac{4}{a-1} + \frac{1}{(a-1)^2}$ の両辺を微分すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S(a)S'(a) &= 2 - \frac{4}{(a-1)^2} - \frac{2}{(a-1)^3} = \frac{2a(a^2-3a+1)}{(a-1)^3} \\ S'(a) &= \frac{4a(a^2-3a+1)}{(a-1)^3S(a)} = \frac{4a(a^2-3a+1)}{(a-1)|a-1|^2} \cdot \frac{|a-1|}{2a\sqrt{2a-1}} \\ &= \frac{2(a^2-3a+1)}{(a-1)|a-1|\sqrt{2a-1}}\end{aligned}$$

したがって、 $S(a)$ の増減表は

a	$(\frac{1}{2})$	$\cdots$	(1)	$\cdots$	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$
$S'(a)$		+		-	0	+
$S(a)$	(0)	$\nearrow$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

$$S\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = (1+\sqrt{5})\sqrt{2+\sqrt{5}}, \quad \lim_{a \rightarrow 1} S(a) = \infty, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} S(a) = \infty$$

よって、求める $S(a)$ のグラフの概形は、次のようになる。

