

平成14年度 大阪大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・基礎工学・医・歯・薬学部 数I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5

1 実数を係数とする3次方程式

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

が異なる3つの実数解をもつとする。このとき、 $a > 0$ 、 $b > 0$ ならば、少なくとも2つの実数解は負であることを示せ。

2 平面上に双曲線 $C: y = \frac{1}{x}$ を考える。 a, b, c, d を $d < c < 0 < b < a$ をみたす数とし、曲線 C 上の4点 P, Q, R, S をそれぞれ x 座標が a, b, c, d であるような点としたとき、四角形 $PQSR$ が長方形になっているとする。

- (1) b, c, d を a を用いて表せ。
- (2) 線分 PR と x 軸との交点を T 、線分 QS と y 軸との交点を U とするとき、線分 TU と曲線 C が共通点をもたないような a の値の範囲を求めよ。
- (3) a が (2) の範囲にあるとき、3線分 PT, TU, UQ と曲線 C で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を求めよ。
- (4) a が (2) の範囲を動くとき、 $S(a)$ の増減を調べその最大値を求めよ。

3 α を $|\alpha| = 1$ であるような複素数とし、複素数の列 $\{z_n\}$ を

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \frac{\alpha^4}{2}, \quad \frac{z_n}{z_{n-1}} = \frac{\alpha^2}{4} \frac{\bar{z}_{n-2}}{\bar{z}_{n-1}} \quad (n = 3, 4, 5, \dots)$$

で定める。ただし、 $\bar{z}_n$ は複素数 z_n の共役な複素数とする。

- (1) 各 n に対し、 z_n を求めよ。
- (2) z_n の実部と虚部をそれぞれ x_n, y_n とし、 $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ とおくとき、無限級数の和

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

をそれぞれ求めよ。

4 n を $n \geq 7$ をみたす整数とし、1つのさいころを投げる試行を n 回くり返す。このとき、 $2 \leq k \leq n$ をみたす整数 k に対し、「 n 回の試行のうち、同じ目が出るどの2つの試行も k 以上離れている」という事象が起こる確率を p_k と表す。ただし、 i 番目の試行と j 番目の試行について、この2つの試行は $|i - j|$ だけ離れているということにする。

- (1) p_2 の値を求めよ。
- (2) $k \geq 3$ のとき、 p_k の値を求めよ。
- (3) 「 n 回の試行において、同じ目が続くことはなく、しかも同じ目が出る試行の組でちょうど2だけ離れたものが少なくとも1組存在する」という事象が起こる確率を求めよ。

5 平面上に原点 O を中心とする半径1の円 C_1 と点 $P(0, \sin \alpha)$ を中心とする半径1の円 C_2 がある。ただし $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ とする。円 C_2 と x 軸との交点を A, B とし、 A, B を通り y 軸と平行な直線をそれぞれ ℓ_A, ℓ_B とする。2直線 ℓ_A, ℓ_B ではさまれた領域の部分で、円 C_1 の外部で円 C_2 の内部であるものを D_1 、円 C_2 の外部で円 C_1 の内部であるものを D_2 とする。いま、 D_1, D_2 をそれぞれ x 軸のまわりに1回転させてできる回転体の体積を $V_1(\alpha), V_2(\alpha)$ とする。

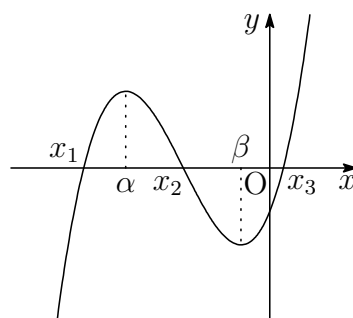
- (1) $V_1(\alpha), V_1(\alpha) - V_2(\alpha)$ をそれぞれ α を用いて表せ。
- (2) α が $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき、 $V_1(\alpha) - V_2(\alpha)$ の最大値を求めよ。

解答例

1 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ とおくと ($a > 0, b > 0$)

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

3 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつから、2 次方程式 $f'(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解をもち、これらを α, β ($\alpha < \beta$) とすると、解と係数の関係により



$$\alpha + \beta = -\frac{2a}{3} < 0, \quad \alpha\beta = \frac{b}{3} > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha < \beta < 0$$

$f(\alpha)$ は極大値, $f(\beta)$ は極小値で $f(\alpha) > 0, f(\beta) < 0$

$f(x) = 0$ の異なる 3 つの実数解を x_1, x_2, x_3 とすると ($x_1 < x_2 < x_3$)

$$x_1 < \alpha < x_2 < \beta < 0$$

よって、3 次方程式 $f(x) = 0$ の少なくとも 2 つの実数解は負である。

別解 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ とおくと ($a > 0, b > 0$)

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$x \geq 0$ において $f'(x) > 0$, すなわち, $f(x)$ は単調増加である。

3 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつから、3 次方程式 $f(x) = 0$ の少なくとも 2 つの実数解は負である。

別解 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0, b > 0$) の異なる 3 つの実数解を α, β, γ とすると ($\alpha < \beta < \gamma$), 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta + \gamma = -a < 0, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b > 0 \quad (*)$$

(*) の第 1 式から $3\alpha < \alpha + \beta + \gamma < 0$ ゆえに $\alpha < 0$

$0 \leq \beta < \gamma$ と仮定すると, (*) の第 1 式から $\alpha + \beta < -\gamma < 0$

このとき, $\alpha\beta \leq 0, (\alpha + \beta)\gamma < 0$ であるから

$$\alpha\beta + (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha < 0$$

上式は, (*) の第 2 式に反するので $\beta < 0$

よって、3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0, b > 0$) が異なる 3 つの実数解をもつとき、その少なくとも 2 つの実数解は負である。 ■

- 2 (1) 四角形 PQSR が長方形であるとき (*) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 0$

$$P\left(a, \frac{1}{a}\right), Q\left(b, \frac{1}{b}\right), R\left(c, \frac{1}{c}\right), S\left(d, \frac{1}{d}\right) \text{ より}$$

$$\overrightarrow{PQ} = (b-a) \left(1, -\frac{1}{ab}\right), \quad \overrightarrow{RS} = (d-c) \left(1, -\frac{1}{cd}\right)$$

$$\overrightarrow{PR} = (c-a) \left(1, -\frac{1}{ca}\right)$$

(*) の第 1 式から

$$\begin{cases} b-a = d-c & \cdots \textcircled{1} \\ ab = cd & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ② から, d を消去すると

$$ab = c(b-a+c)$$

$$\text{ゆえに } (c-a)(c+b) = 0$$

$$c \neq a \text{ より } c = -b \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入すると } d = -a$$

$$(*) \text{ の第 2 式から } 1 + \frac{1}{a^2bc} = 0 \quad \textcircled{3} \text{ を代入すると } 1 - \frac{1}{a^2b^2} = 0$$

$$\text{したがって } b^2 = \frac{1}{a^2} \quad 0 < b < a \text{ より } b = \frac{1}{a} \quad \textcircled{3} \text{ より } c = -\frac{1}{a}$$

$$0 < b < a \text{ より, } 0 < \frac{1}{a} < a \text{ であるから } a > 1$$

$$\text{よって } b = \frac{1}{a}, c = -\frac{1}{a}, d = -a \quad (a > 1)$$

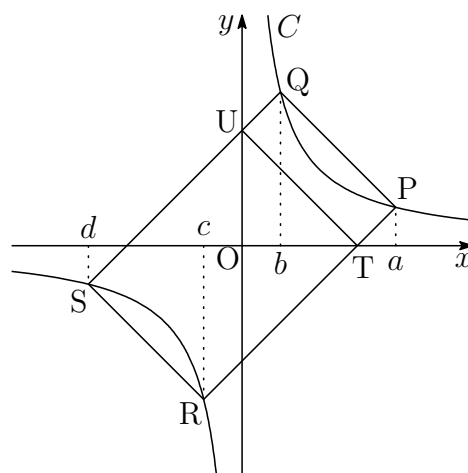
- (2) (1) の結果から, $P\left(a, \frac{1}{a}\right), Q\left(\frac{1}{a}, a\right)$, 直線 PR の傾きは 1 で, 直線 QS の傾きも 1 であるから

$$\text{直線 PR : } y = x - a + \frac{1}{a}, \quad \text{直線 QS : } y = x - \frac{1}{a} + a$$

$$\text{これから } T\left(a - \frac{1}{a}, 0\right), U\left(0, a - \frac{1}{a}\right), \text{ 直線 TU : } y = -x + a - \frac{1}{a}$$

$$\text{このとき点 } (1, 1) \text{ は直線 TU の上側にあるから } (a > 1) \quad 1 > -1 + a - \frac{1}{a}$$

$$\text{したがって } a^2 - 2a - 1 < 0 \quad \text{よって } 1 < a < 1 + \sqrt{2}$$



- (3) (1), (2) の結果から 3 点 P, Q, T の x 座標は, それぞれ $a, \frac{1}{a}, a - \frac{1}{a}$
直線 PQ, PT の傾きは, それぞれ 1, -1 であるから

$$PQ = \sqrt{2} \left(a - \frac{1}{a} \right), \quad PT = \frac{\sqrt{2}}{a}$$

長方形 PQUT の面積を S とすると

$$S = PQ \cdot PT = \sqrt{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \frac{\sqrt{2}}{a} = 2 \left(1 - \frac{1}{a^2} \right)$$

したがって

$$\begin{aligned} S(a) &= S - \int_{\frac{1}{a}}^a \left\{ \left(-x + a + \frac{1}{a} \right) - \frac{1}{x} \right\} dx \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{a^2} \right) + \left[\frac{x^2}{2} - \left(a + \frac{1}{a} \right) x + \log x \right]_{\frac{1}{a}}^a \\ &= 2 \log a - \frac{a^2}{2} - \frac{3}{2a^2} + 2 \end{aligned}$$

- (4) (2), (3) の結果から

$$\begin{aligned} S'(a) &= \frac{2}{a} - a + \frac{3}{a^3} = -\frac{1}{a^3} (a^4 - 2a^2 - 3) \\ &= -\frac{1}{a^3} (a + \sqrt{3})(a - \sqrt{3})(a^2 + 1) \end{aligned}$$

a	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	$1 + \sqrt{2}$
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって 最大値 $S(\sqrt{3}) = \log 3$



$$\boxed{3} \quad (1) \quad z_1 = 1, \quad z_2 = \frac{\alpha^4}{2}, \quad \frac{z_n}{z_{n-1}} = \frac{\alpha^2}{4} \frac{\bar{z}_{n-2}}{\bar{z}_{n-1}} \quad (n = 3, 4, 5, \dots)$$

$$|\alpha| = 1 \text{ より, } |z_2| = \frac{1}{2}, \quad \left| \frac{z_n}{z_{n-1}} \right| = \left| \frac{\alpha^2}{4} \frac{\bar{z}_{n-2}}{\bar{z}_{n-1}} \right| \text{ であるから}$$

$$\frac{|z_n|}{|z_{n-1}|} = \frac{1}{4} \frac{|z_{n-2}|}{|z_{n-1}|} \quad \text{ゆえに} \quad |z_n| = \frac{1}{4} |z_{n-2}|$$

$$n \text{ が偶数のとき} \quad |z_n| = |z_2| \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{n-2}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-2}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$n \text{ が奇数のとき} \quad |z_n| = |z_1| \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{n-1}{2}} = 1 \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\text{したがって} \quad |z_n| = \frac{1}{2^{n-1}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\text{与えられた漸化式から, } n \geq 3 \text{ のとき} \quad \prod_{k=3}^n \frac{z_k}{z_{k-1}} = \prod_{k=3}^n \frac{\alpha^2}{4} \prod_{k=3}^n \frac{\bar{z}_{k-2}}{\bar{z}_{k-1}}$$

$$\frac{z_n}{z_2} = \left(\frac{\alpha^2}{4} \right)^{n-2} \frac{1}{\bar{z}_{n-1}} \quad \text{ゆえに} \quad z_n = \frac{\alpha^4}{2} \left(\frac{\alpha^2}{4} \right)^{n-2} \frac{z_{n-1}}{|z_{n-1}|^2}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{z_n}{z_{n-1}} = \frac{\alpha^{2n}}{2^{2n-3}} (2^{n-2})^2 = \frac{\alpha^{2n}}{2} \quad \dots (*)$$

(*) は, $n = 2$ のときも成立するから, (*) は $n \geq 2$ で成立する. このとき

$$\prod_{k=2}^n \frac{z_k}{z_{k-1}} = \prod_{k=2}^n \frac{\alpha^{2k}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad z_n = \frac{\alpha^{(n-1)(n+2)}}{2^{n-1}}$$

$$\text{上式は, } n = 1 \text{ のときも成立するから} \quad z_n = \frac{\alpha^{(n-1)(n+2)}}{2^{n-1}}$$

(2) $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ より, $\alpha^3 = 1$ であるから, 法 3 について

$$\begin{cases} n \equiv 1 \text{ のとき} & (n-1)(n+2) \equiv 0 \\ n \not\equiv 1 \text{ のとき} & (n-1)(n+2) \equiv 1 \end{cases} \pmod{3}$$

$z_n = \frac{\alpha^{(n-1)(n+2)}}{2^{n-1}}$ について, $A_j = z_{3j-2} + z_{3j-1} + z_{3j}$ とおくと ($j = 1, 2, \dots$)

$$A_j = \frac{1}{2^{3j-3}} + \frac{\alpha}{2^{3j-2}} + \frac{\alpha}{2^{3j-1}} = \frac{4 + 2\alpha + \alpha}{2^{3j-1}} = \frac{4 + 3\alpha}{4} \left(\frac{1}{8}\right)^{j-1}$$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\alpha^{(n-1)(n+2)}}{2^{n-1}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2 \text{ より, } \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ は収束する.}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} z_n &= \sum_{j=1}^{\infty} A_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4 + 3\alpha}{4} \left(\frac{1}{8}\right)^{j-1} = \frac{4 + 3\alpha}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} \\ &= \frac{1}{7}(8 + 6\alpha) = \frac{1}{7} \left\{ 8 + 6 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right\} = \frac{5}{7} + \frac{3\sqrt{3}}{7}i \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + i \sum_{k=1}^{\infty} y_k \text{ であるから}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \frac{5}{7}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} y_k = \frac{3\sqrt{3}}{7}$$

■

- 4 (1) p_2 は連続して同じ目が出ない、すなわち、2 回目の試行以降は直前の目と異なる目が出る確率であるから

$$p_2 = 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

- (2) p_3 は直前の 2 回と同じ目が出ない確率であるから

$$p_3 = 1 \cdot \frac{5}{6} \left(\frac{4}{6}\right)^{n-2} = \frac{5}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

p_4 は直前の 3 回と同じ目が出ない確率であるから

$$p_4 = 1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \left(\frac{3}{6}\right)^{n-3} = \frac{5}{9} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

p_5 は直前の 4 回と同じ目が出ない確率であるから

$$p_5 = 1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \left(\frac{2}{6}\right)^{n-4} = \frac{5}{18} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-4}$$

p_6 は直前の 5 回と同じ目が出ない確率であるから

$$p_6 = 1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-5} = \frac{5}{54} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-5}$$

$7 \leq k$ のとき $p_k = 0$

別解 $2 \leq k \leq 6$ のとき
$$p_k = \frac{5!}{6^{k-2}(7-k)!} \left(\frac{7-k}{6}\right)^{n+1-k}$$

$7 \leq k$ のとき $p_k = 0$

- (3) (2) の結果から、求める確率は

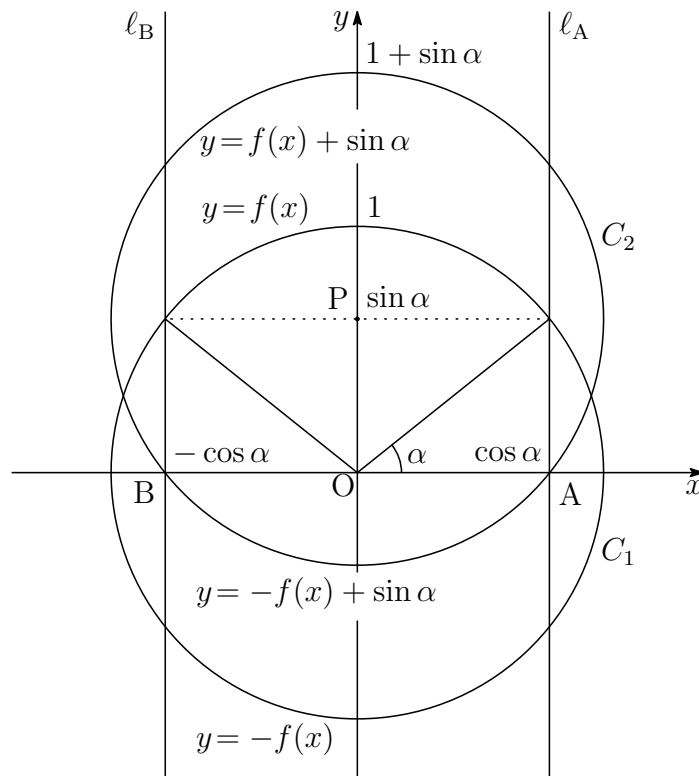
$$p_2 - p_3 = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \frac{5}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$



5 (1) $-\cos \alpha \leq x \leq \cos \alpha$ における C_1 の x 軸の上側の曲線を $y = f(x)$ とすると

$$\begin{aligned}
 \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} f(x) dx &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cos \alpha \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot 1^2 (\pi - 2\alpha) \\
 &= \frac{1}{2} (2 \sin \alpha \cos \alpha + \pi - 2\alpha), \\
 \frac{V_1(\alpha)}{\pi} &= \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} \{(f(x) + \sin \alpha)^2 - f(x)^2\} dx \\
 &= (2 \sin \alpha) \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} f(x) dx + (\sin^2 \alpha) \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} dx \\
 &= (2 \sin \alpha \cos \alpha + \pi - 2\alpha) \sin \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \\
 &= (4 \sin \alpha \cos \alpha + \pi - 2\alpha) \sin \alpha, \\
 \frac{V_2(\alpha)}{\pi} &= \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} \{|-f(x)|^2 - |-f(x) + \sin \alpha|^2\} dx \\
 &= (2 \sin \alpha) \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} f(x) dx - (\sin^2 \alpha) \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} dx, \\
 \frac{V_1(\alpha)}{\pi} - \frac{V_2(\alpha)}{\pi} &= (2 \sin^2 \alpha) \int_{-\cos \alpha}^{\cos \alpha} dx = 4 \sin^2 \alpha \cos \alpha
 \end{aligned}$$

よって $V_1(\alpha) = \pi(4 \sin \alpha \cos \alpha + \pi - 2\alpha) \sin \alpha$
 $V_1(\alpha) - V_2(\alpha) = 4\pi \sin^2 \alpha \cos \alpha$



(2) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より, $t = \cos \alpha$, $V_1(\alpha) - V_2(\alpha) = g(t)$ とおくと

$$g(t) = 4\pi(1 - t^2)t = 4\pi(t - t^3) \quad (0 < t < 1)$$

したがって $g'(t) = 4\pi(1 - 3t^2)$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(1)
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$		$\nearrow$	$\frac{8\pi}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	

よって, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき, 最大値 $\frac{8\pi}{3\sqrt{3}}$ をとる. ■