

平成25年度 大阪大学 2次試験前期日程 (数学問題)90分
文・法・経済・医(看護)・外国語・人間科学 数I・II・A・B

問題 1 2 3

- 1 xy 平面において, 点 (x_0, y_0) と直線 $ax + by + c = 0$ の距離は

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

である. これを証明せよ.

- 2 1個のさいころを3回投げる試行において, 1回目に出る目を a , 2回目に出る目を b , 3回目に出る目を c とする.

(1) $\log_{\frac{1}{4}}(a + b) > \log_{\frac{1}{2}} c$ となる確率を求めよ.

(2) $2^a + 2^b + 2^c$ が3の倍数となる確率を求めよ.

- 3 曲線 $y = x^2 + x + 4 - |3x|$ と直線 $y = mx + 4$ で囲まれる部分の面積が最小となるように定数 m の値を定めよ.

解答例

- 1 点 (x_0, y_0) を P とし, P から直線 $ax + by + c = 0$ に垂線 PH を引く. 点 H の座標を (x_1, y_1) とすると

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

直線 $ax + by + c = 0$ はベクトル (a, b) に垂直であるから, 実数 t を用いて

$$\overrightarrow{PH} = t(a, b) \quad \text{ゆえに} \quad (x_1 - x_0, y_1 - y_0) = t(a, b)$$

したがって $(*) \begin{cases} x_1 = at + x_0 \\ y_1 = bt + y_0 \end{cases}$

$(*)$ を $\textcircled{1}$ に代入すると

$$a(at + x_0) + b(bt + y_0) + c = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$$

求める距離は

$$|\overrightarrow{PH}| = |t|\sqrt{a^2 + b^2} = \left| -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \right| \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

■

- 2 (1) $\log_{\frac{1}{4}}(a + b) > \log_{\frac{1}{2}} c = \log_{\frac{1}{4}} c^2 \quad \text{ゆえに} \quad a + b < c^2 \quad \cdots (*)$

$a + b$ の値に対する (a, b) の組の個数は, 次のようになる.

$a + b$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
個数	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	36

$c = 1$ のとき, $(*)$ を満たす (a, b) の組はない.

$c = 2$ のとき, $(*)$ を満たす (a, b) の組の個数は $1 + 2 = 3$ (通り)

$c = 3$ のとき, $(*)$ を満たす (a, b) の組の個数は

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 = 26 \text{ (通り)}$$

$c = 4, 5, 6$ のとき, $(*)$ を満たす (a, b) の組は, それぞれ 36 通り.

よって, 求める確率は $\frac{3 + 26 + 36 \times 3}{6^3} = \frac{137}{216}$

- (2) $2^a + 2^b + 2^c \equiv (-1)^a + (-1)^b + (-1)^c \pmod{3}$

したがって, $2^a + 2^b + 2^c$ が 3 の倍数となるのは, a, b, c がすべて奇数またはすべて偶数のときである. よって, 求める確率は

$$\frac{3^3 + 3^3}{6^3} = \frac{1}{4}$$

■

3 曲線 $C: y = x^2 + x + 4 - |3x|$ は

$$y = \begin{cases} (x+2)^2 & (x \leq 0) \\ (x-1)^2 + 3 & (x \geq 0) \end{cases}$$

$x \leq 0$ のとき, C と直線 $l: y = mx + 4$ の方程式から y を消去すると

$$x(x - m + 4) = 0$$

$m \leq 4$ のとき, C と l の共有点の x 座標は $x = 0, m - 4$

このとき, C と l で囲まれる部分の面積を S_1 とすると

$$S_1 = \frac{1}{6}(4 - m)^3$$

$x \geq 0$ のとき, C と l の方程式から y を消去すると

$$x(x - m - 2) = 0$$

$m \geq -2$ のとき, C と l の共有点の x 座標は $x = 0, m + 2$

このとき, C と l で囲まれる部分の面積を S_2 とすると

$$S_2 = \frac{1}{6}(m + 2)^3$$

ゆえに, C と l で囲まれる部分の面積を S とすると

$$S = \begin{cases} S_1 & (m \leq -2) \\ S_1 + S_2 & (-2 \leq m \leq 4) \\ S_2 & (4 \leq m) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad m \leq -2 \text{ のとき} \quad S &= \frac{1}{6}(4 - m)^3 \\ -2 \leq m \leq 4 \text{ のとき} \quad S &= 3(m - 1)^2 + 9 \\ 4 \leq m \text{ のとき} \quad S &= \frac{1}{6}(m + 2)^3 \end{aligned}$$

よって, $m = 1$ のとき, 面積は最小値 9 をとる. ■

