

平成24年度 大阪大学 2次試験前期日程 (数学問題)90分
文・法・経済・医(看護)・外国語・人間科学 数I・II・A・B

問題 1 2 3

- 1 1個のさいころを3回続けて投げるとき, 1回目に出る目を l , 2回目に出る目を m , 3回目に出る目を n で表し, 3次式

$$f(x) = x^3 + lx^2 + mx + n$$

を考える. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) $f(x)$ が $(x+1)^2$ で割り切れる確率を求めよ.
- (2) 関数 $y = f(x)$ が極大値も極小値もとる確率を求めよ.

- 2 次の2つの条件 (i), (ii) をみたす自然数 n について考える.

- (i) n は素数ではない.
- (ii) l, m を1でも n でもない n の正の約数とすると, 必ず

$$|l - m| \leq 2$$

である.

このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) n が偶数のとき, (i), (ii) をみたす n をすべて求めよ.
- (2) n が7の倍数のとき, (i), (ii) をみたす n をすべて求めよ.
- (3) $2 \leq n \leq 1000$ の範囲で, (i), (ii) をみたす n をすべて求めよ.

- 3 xy 平面上で考える. 不等式 $y < -x^2 + 16$ の表す領域を D とし, 不等式 $|x - 1| + |y| \leq 1$ の表す領域を E とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 領域 D と領域 E をそれぞれ図示せよ.
- (2) $A(a, b)$ を領域 D に属する点とする. 点 $A(a, b)$ を通り傾きが $-2a$ の直線と放物線 $y = -x^2 + 16$ で囲まれた部分の面積を $S(a, b)$ とする. $S(a, b)$ を a, b を用いて表せ.
- (3) 点 $A(a, b)$ が領域 E を動くとき, $S(a, b)$ の最大値を求めよ.

解答例

- 1 (1) $f(x) = x^3 + lx^2 + mx + n$ を変形すると

$$f(x) = (x+1)^2(x+l-2) + (-2l+m+3)x - l + n + 2$$

$f(x)$ が $(x+1)^2$ で割り切れるとき

$$\begin{cases} -2l+m+3=0 \\ -l+n+2=0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} m=2l-3 \\ n=l-2 \end{cases}$$

l, m, n は 1 以上 6 以下の整数であるから、これをみたすのは

$$(l, m, n) = (3, 3, 1), (4, 5, 2)$$

の 2 組である． よって、求める確率は $\frac{2}{6^3} = \frac{1}{108}$

- (2) $f(x)$ を微分すると $f'(x) = 3x^2 + 2lx + m$

関数 $y = f(x)$ が極大値・極小値をとるのは、 $f'(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつときであるから、その係数について

$$D/4 = l^2 - 3m > 0 \quad \text{ゆえに} \quad m < \frac{l^2}{3}$$

よって、これをみたす (l, m) の組は、次の 20 組である．

$$\begin{array}{ll} l=2 \text{ のとき} & m=1 \\ l=3 \text{ のとき} & m=1, 2 \\ l=4 \text{ のとき} & m=1, 2, 3, 4, 5 \\ l=5, 6 \text{ のとき} & m=1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{array}$$

このとき、これらの 20 組に対して、 $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ の 6 通りが対応する． よって、求める確率は

$$\frac{20 \times 6}{6^3} = \frac{5}{9}$$



- 2** (1) $n = 2l$ とおくと (l は 2 以上の整数), (ii) より

$$|l - 2| \leq 2 \quad \text{ゆえに} \quad l = 2, 3, 4 \quad \text{すなわち} \quad n = 4, 6, 8$$

これらは, 条件 (i), (ii) をみたす. よって $n = 4, 6, 8$

- (2) $n = 7l$ とおくと (l は 2 以上の整数), (ii) より

$$|l - 7| \leq 2 \quad \text{ゆえに} \quad l = 5, 6, 7, 8, 9$$

すなわち $n = 35, 42, 49, 56, 63$

このうち, 条件 (i), (ii) をみたすものは $n = 35, 49$

- (3) 条件 (i), (ii) をみたす偶数 n は (1) で求めたので, これらの条件をみたす奇数 n を求める. このとき, n は 1 でも n でもない相異なる奇数の約数を 3 個以上もつことはない. 実際, それらのうち 3 個の奇数を p, q, r とすると ($p < q < r$), $r - p \geq 4$ であるから, 条件 (ii) をみたさない.

$$p^2 \quad \text{または} \quad p(p+2) \quad (p, p+2 \text{ は奇素数})$$

- (a) $n = p^2$ のとき (p は奇素数), $2 \leq n \leq 1000$ であるものは

$$n = 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2, 29^2, 31^2$$

- (b) $n = p(p+2)$ のとき ($p, p+2$ は奇素数), $2 \leq n \leq 1000$ であるものは

$$n = 3 \cdot 5, 5 \cdot 7, 11 \cdot 13, 17 \cdot 19, 29 \cdot 31$$

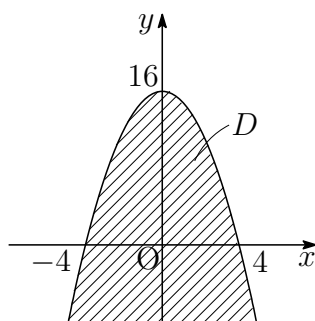
したがって, (1), (a), (b) より, 求める n は

$$\begin{aligned} n = & 4, 6, 8, \\ & 9, 25, 49, 121, 169, 289, 361, 529, 841, 961, \\ & 15, 35, 143, 323, 899 \end{aligned}$$

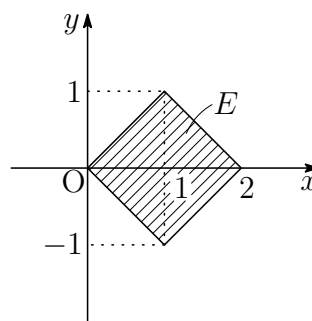
補足 約数が 1 個のとき: $n = p^2$ (p は奇素数) の形に限られる. ($n = p^3$ のときは約数が p, p^2 の 2 個になるが, 差が $|p^2 - p| \leq 2 \implies p = 2$ となり奇数条件に反するため不適).

約数が 2 個のとき: $n = pq$ (p, q は相異なる奇素数) の形に限られる. このとき約数は p, q の 2 個であり, 条件 (ii) より $|p - q| \leq 2$, すなわち $q = p + 2$ となるため, $n = p(p + 2)$ (双子素数の積) の形に限る. ■

- 3 (1) $D: y < -x^2 + 16$, $E: |x - 1| + |y| \leq 1$



境界線を含まない



境界線を含む

- (2) $A(a, b)$ は D に属する点であるから

$$b < -a^2 + 16 \quad \text{ゆえに} \quad 16 - a^2 - b > 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

点 $A(a, b)$ を通り傾き $-2a$ の直線は

$$y - b = -2a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = -2ax + 2a^2 + b$$

この直線の方程式と放物線 $y = -x^2 + 16$ の方程式から y を消去すると

$$-2ax + 2a^2 + b = -x^2 + 16 \quad \text{ゆえに} \quad (x - a)^2 = 16 - a^2 - b$$

① に注意してこれを解くと $x = a \pm \sqrt{16 - a^2 - b}$

これらの2解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると $\beta - \alpha = 2\sqrt{16 - a^2 - b}$

$$\text{よって} \quad S(a, b) = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{4}{3}(16 - a^2 - b)^{\frac{3}{2}}$$

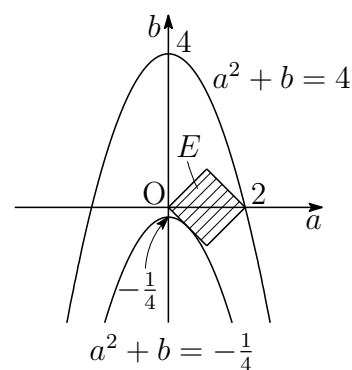
- (3) E において, $a^2 + b$ の取り得る値の範囲は,

$$\text{右の図から} \quad -\frac{1}{4} \leq a^2 + b \leq 4$$

$$S(a, b) = \frac{4}{3}(16 - a^2 - b)^{\frac{3}{2}} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} S(a, b) &\leq S\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{4}{3}\left(16 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{65\sqrt{65}}{6} \end{aligned}$$

$$\text{よって 最大値 } S\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{65\sqrt{65}}{6}$$



■