

平成23年度 大阪大学 2次試験前期日程(数学問題)90分
文・法・経済・医(看護)・外国語・人間科学 数I・II・A・B

問題 1 2 3

- 1 実数の組 (x, y, z) で, どのような整数 l, m, n に対しても, 等式

$$l \cdot 10^{x-y} - nx + l \cdot 10^{y-z} + m \cdot 10^{x-z} = 13l + 36m + ny$$

が成り立つようなものをすべて求めよ.

- 2 実数の組 (p, q) に対し, $f(x) = (x-p)^2 + q$ とおく.

- (1) 放物線 $y = f(x)$ が点 $(0, 1)$ を通り, しかも直線 $y = x$ の $x > 0$ の部分と接するような実数の組 (p, q) と接点の座標を求めよ.
- (2) 実数の組 $(p_1, q_1), (p_2, q_2)$ に対して, $f_1(x) = (x-p_1)^2 + q_1$ および $f_2(x) = (x-p_2)^2 + q_2$ とおく. 実数 α, β (ただし $\alpha < \beta$) に対して

$$f_1(\alpha) < f_2(\alpha) \quad \text{かつ} \quad f_1(\beta) < f_2(\beta)$$

であるならば, 区間 $\alpha \leq x \leq \beta$ において不等式 $f_1(x) < f_2(x)$ がつねに成り立つことを示せ.

- (3) 長方形 $R: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ を考える. また, 4点 $P_0(0, 1), P_1(0, 0), P_2(1, 1), P_3(1, 0)$ をこの順に線分で結んで得られる折れ線を L とする. 実数の組 (p, q) を, 放物線 $y = f(x)$ と折れ線 L に共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき, R の点のうちで放物線 $y = f(x)$ が通過する点全体の集合を T とする. R から T を除いた領域 S を座標平面上に図示し, その面積を求めよ.

- 3 a, b, c を実数とする. ベクトル $\vec{v}_1 = (3, 0), \vec{v}_2 = (1, 2\sqrt{2})$ をとり, $\vec{v}_3 = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2$ とおく. 座標平面上のベクトル $\vec{p}$ に対する条件

$$(*) \quad (\vec{v}_1 \cdot \vec{p})\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 \cdot \vec{p})\vec{v}_2 + (\vec{v}_3 \cdot \vec{p})\vec{v}_3 = c\vec{p}$$

を考える. ここで $\vec{v}_i \cdot \vec{p}$ ($i = 1, 2, 3$) はベクトル $\vec{v}_i$ とベクトル $\vec{p}$ の内積を表す. このとき以下の問いに答えよ.

- (1) 座標平面上の任意のベクトル $\vec{v} = (x, y)$ が, 実数 s, t を用いて $\vec{v} = s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2$ と表されることを, s および t の各々を x, y の式で表すことによって示せ.
- (2) $\vec{p} = \vec{v}_1$ と $\vec{p} = \vec{v}_2$ の両方が条件 $(*)$ をみたすならば, 座標平面上のすべてのベクトル $\vec{v}$ に対して, $\vec{p} = \vec{v}$ が条件 $(*)$ をみたすことを示せ.
- (3) 座標平面上のすべてのベクトル $\vec{v}$ に対して, $\vec{p} = \vec{v}$ が条件 $(*)$ をみたす. このような実数の組 (a, b, c) をすべて求めよ.

解答例

1 与えられた等式は、整数 l, m, n に関する恒等式であるから

$$10^{x-y} + 10^{y-z} = 13, \quad 10^{x-z} = 36, \quad y = -x$$

上の3式から y を消去すると

$$10^{2x} + 10^{-x-z} = 13, \quad 10^{x-z} = 36 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$t = 10^x$ とおくと、 $10^{2x} = t^2$, $10^{-x-z} = 10^{x-z} \cdot 10^{-2x} = 36t^{-2}$ より

$$t^2 + 36t^{-2} = 13 \quad \text{ゆえに} \quad (t^2 - 4)(t^2 - 9) = 0$$

$t > 0$ に注意して、これを解くと $t = 2, 3$

(i) $t = 2$ のとき、 $10^x = 2$ を $\textcircled{1}$ に代入すると

$$2 \cdot 10^{-z} = 36 \quad \text{ゆえに} \quad z = -\log_{10} 18$$

$$x = -y \text{ より} \quad x = -y = \log_{10} 2$$

(ii) $t = 3$ のとき、 $10^x = 3$ を $\textcircled{1}$ に代入すると

$$3 \cdot 10^{-z} = 36 \quad \text{ゆえに} \quad z = -\log_{10} 12$$

$$x = -y \text{ より} \quad x = -y = \log_{10} 3$$

(i), (ii) より

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (\log_{10} 2, -\log_{10} 2, -\log_{10} 18), \\ &\quad (\log_{10} 3, -\log_{10} 3, -\log_{10} 12) \end{aligned}$$



- 2** (1) 放物線 $y = (x - p)^2 + q$ が点 $(0, 1)$ を通るから $p^2 + q = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$

$y = (x - p)^2 + q$ と $y = x$ から y を消去すると

$$(x - p)^2 + q = x \quad \text{整理すると} \quad x^2 - (2p + 1)x + p^2 + q = 0 \quad \cdots (*)$$

上の放物線と直線は接するから, $(*)$ の係数について

$$(2p + 1)^2 - 4(p^2 + q) = 0 \quad \text{整理すると} \quad 4p - 4q + 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$(*)$ より, 接点の x 座標 $\frac{2p + 1}{2}$ が正であるから

$$\frac{2p + 1}{2} > 0 \quad \text{これを解いて} \quad p > -\frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ から q を消去すると

$$4p^2 + 4p - 3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (2p + 3)(2p - 1) = 0$$

$\textcircled{3}$ に注意して解くと $p = \frac{1}{2}, q = \frac{3}{4}$

接点の x 座標は 1 で, 直線 $y = x$ 上の点であるから 接点 $(1, 1)$

- (2) $g(x) = f_2(x) - f_1(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} g(x) &= (x - p_2)^2 + q_2 - (x - p_1)^2 - q_1 \\ &= 2(p_1 - p_2)x - p_1^2 + p_2^2 - q_1 + q_2 \end{aligned}$$

$g(x)$ のグラフは直線であるから, $m = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha}$ とおくと

$$g(x) = m(x - \alpha) + g(\alpha) \quad \cdots \textcircled{A}$$

または

$$g(x) = m(x - \beta) + g(\beta) \quad \cdots \textcircled{B}$$

とおける $(\alpha < \beta)$. 与えられた条件から, $g(\alpha) > 0, g(\beta) > 0$ である.

- (i) $0 < g(\alpha) \leq g(\beta)$ のとき

(A) より, $\alpha \leq x \leq \beta$ において, $m \geq 0, x - \alpha \geq 0$ であるから

$$g(x) = m(x - \alpha) + g(\alpha) \geq g(\alpha) > 0$$

- (ii) $0 < g(\beta) < g(\alpha)$ のとき

(B) より, $\alpha \leq x \leq \beta$ において, $m < 0, x - \beta \leq 0$ であるから

$$g(x) = m(x - \beta) + g(\beta) \geq g(\beta) > 0$$

- (i), (ii) より, $\alpha \leq x \leq \beta$ において $g(x) > 0$ すなわち $f_1(x) < f_2(x)$

(3) (1) の結果から

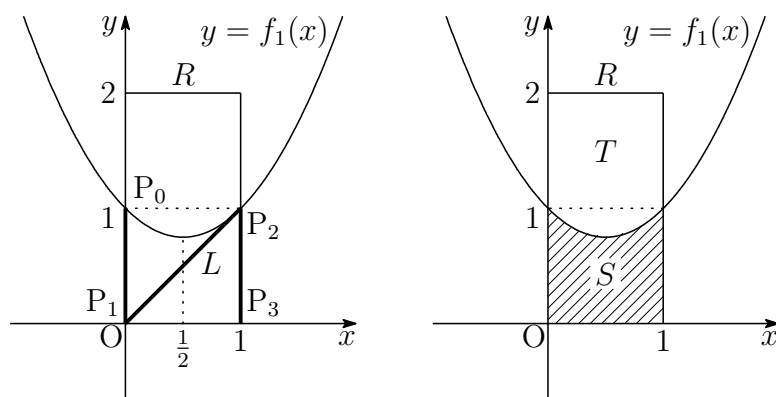
$$f_1(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = x^2 - x + 1$$

とおくと $f_1(0) = 1, f_1(1) = 1$

R を通過する放物線 $y = f_2(x)$ が L と共有点がないから

$$f_1(0) < f_2(0), f_1(1) < f_2(1)$$

(2) の結論から, $0 \leq x \leq 1$ において, $f_1(x) < f_2(x)$ であるから, R の点のうちで放物線 $y = f_2(x)$ が通過する点全体の集合は, R の点のうちで放物線 $y = f_1(x)$ の上側である. したがって, R から T を除いた領域 S は右下の図の斜線部分で, 境界線を含む.



よって, 求める面積は

$$\int_0^1 (x^2 - x + 1) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^1 = \frac{5}{6}$$

■

3 (1) $\vec{v} = s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2$ より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} x = 3s + t \\ y = 2\sqrt{2}t \end{cases}$$

$$\text{よって} \quad s = \frac{x}{3} - \frac{y}{6\sqrt{2}}, \quad t = \frac{y}{2\sqrt{2}}$$

(2) $\vec{p} = \vec{v}_1$ と $\vec{p} = \vec{v}_2$ の両方が (*) をみたすとき

$$(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_2 + (\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_3 - c\vec{v}_1 = \vec{0} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_2 + (\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_3 - c\vec{v}_2 = \vec{0} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ は 1 次独立であるから、座標平面上の任意のベクトル $\vec{v}$ は

$$\vec{v} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 \quad (\alpha, \beta \text{ は実数})$$

とかける。このとき、①、②より

$$\begin{aligned} & (\vec{v}_1 \cdot \vec{p})\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 \cdot \vec{p})\vec{v}_2 + (\vec{v}_3 \cdot \vec{p})\vec{v}_3 - c\vec{p} \\ &= \alpha\{(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_2 + (\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_3 - c\vec{v}_1\} \\ & \quad + \beta\{(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_2 + (\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_3 - c\vec{v}_2\} \\ &= \alpha\vec{0} + \beta\vec{0} = \vec{0} \end{aligned}$$

よって、座標平面上のすべてのベクトル $\vec{v}$ に対して、 $\vec{p} = \vec{v}$ が条件 (*) をみたす。

(3) ①, ② は, $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = 9$, $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 3$, $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = 9$ より

$$(9 - c)\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 = -(\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_3 \quad \cdots \textcircled{1}'$$

$$3\vec{v}_1 + (9 - c)\vec{v}_2 = -(\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_3 \quad \cdots \textcircled{2}'$$

上の2つのベクトルは, 平行であるから

$$(9 - c)^2 - 3^2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad c = 6, 12$$

(i) $c = 6$ のとき, $\vec{v}_3 = a(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$ とおけるから, ①', ②' より

$$3(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = -12a\vec{v}_3 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = -4a\vec{v}_3$$

このとき, $-4a^2 = 1$ となり, これをみたす実数 a は存在しない.

(ii) $c = 12$ のとき, $\vec{v}_3 = a(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$ とおけるから, ①', ②' より

$$3(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = 6a\vec{v}_3 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = 2a\vec{v}_3$$

$$\text{このとき} \quad 2a^2 = 1 \quad \text{これを解いて} \quad a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって $(a, b, c) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}}, 12 \right)$ (複号同順) ■