

平成22年度 大阪大学 2次試験前期日程 (数学問題)90分
 文・法・経済・医(看護)・外国語・人間科学 数I・II・A・B

問題 1 2 3

1 曲線 $C: y = -x^2 - 1$ を考える.

(1) t が実数全体を動くとき, 曲線 C 上の点 $(t, -t^2 - 1)$ を頂点とする放物線

$$y = \frac{3}{4}(x - t)^2 - t^2 - 1$$

が通過する領域を xy 平面上に図示せよ.

(2) D を (1) で求めた領域の境界とする. D が x 軸の正の部分と交わる点を $(a, 0)$ とし, $x = a$ での C の接線を ℓ とする. D と ℓ で囲まれた部分の面積を求めよ.

2 連立方程式

$$\begin{cases} 2^x + 3^y = 43 \\ \log_2 x - \log_3 y = 1 \end{cases}$$

を考える.

- (1) この連立方程式を満たす自然数 x, y の組を求めよ.
- (2) この連立方程式を満たす正の実数 x, y は, (1) で求めた自然数の組以外に存在しないことを示せ.

3 (1) 不等式

$$(|x| - 2)^2 + (|y| - 2)^2 \leq 1$$

の表す領域を xy 平面上に図示せよ.

(2) 1 個のさいころを 4 回投げ, n 回目 ($n = 1, 2, 3, 4$) に出た目の数を a_n とする. このとき

$$(x, y) = (a_1 - a_2, a_3 - a_4)$$

が (1) の領域に含まれる確率を求めよ.

解答例

- 1 (1) $y = \frac{3}{4}(x-t)^2 - t^2 - 1$ を t について整理すると

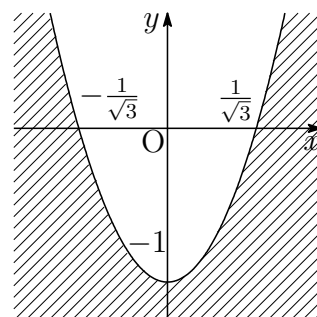
$$t^2 + 6xt - 3x^2 + 4y + 4 = 0$$

この t に関する 2 次方程式は実数解をもつから

$$D/4 = (3x)^2 - (-3x^2 + 4y + 4) \geq 0$$

したがって $y \leq 3x^2 - 1$

よって、求める領域は右の図の斜線部分で境界線を含む。



- (2) (1) の結果から $D: y = 3x^2 - 1$

D の x 軸の正の部分と交わる点 $(a, 0)$ は $(a > 0)$

$$3a^2 - 1 = 0 \quad \text{すなわち} \quad a = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$C: y = -x^2 - 1$ より $y' = -2x$

C 上の点 $(a, 0)$ における接線 ℓ の方程式は

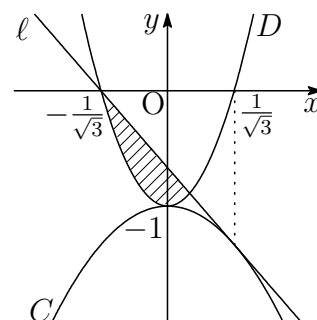
$$y = -2a(x - a) - a^2 - 1$$

ゆえに $y = -2ax + a^2 - 1$ すなわち $y = -\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{3}$

D と ℓ の交点の x 座標は

$$3x^2 - 1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{3} \quad \text{これを解いて} \quad x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

求める面積は右の図の斜線部分で、その面積を S とすると



$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{3\sqrt{3}}} \left\{ -\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{2}{3} - (3x^2 - 1) \right\} dx \\ &= -3 \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{3\sqrt{3}}} \left(x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(x - \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) dx \\ &= \frac{3}{6} \left\{ \frac{1}{3\sqrt{3}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}^3 = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3\sqrt{3}} \right)^3 = \frac{32\sqrt{3}}{243} \end{aligned}$$



2 (1) (*) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 43 \\ \log_2 x - \log_3 y = 1 \end{cases}$

(*) の第 2 式から, $\log_2 x = \log_3 y + 1 = t$ とおくと

$$(**) \begin{cases} x = 2^t \\ y = 3^{t-1} \end{cases}$$

これを (*) の第 1 式に代入すると

$$2^{2^t} + 3^{3^{t-1}} = 43 \quad \cdots \textcircled{1}$$

t の関数 2^{2^t} , $3^{3^{t-1}}$ は単調増加であるから, $2^{2^t} + 3^{3^{t-1}}$ は単調増加関数である. したがって, $t = 2$ は $\textcircled{1}$ を満たす唯一の解である.

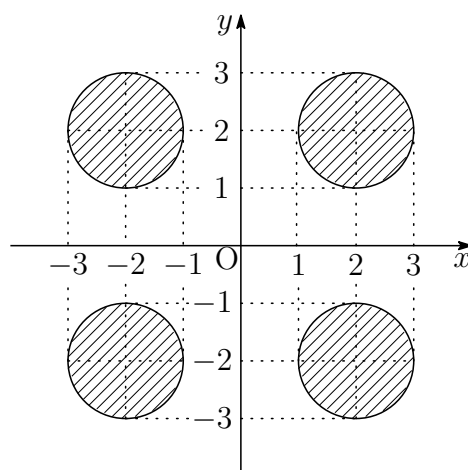
これを (**) に代入して $(x, y) = (4, 3)$

(2) (1) の結果から, x, y の組は $(x, y) = (4, 3)$ 以外に存在しない. ■

3 (1) 領域

$$(|x| - 2)^2 + (|y| - 2)^2 \leq 1$$

は x 軸および y 軸に関して対称.
第 1 象限にある領域は, 中心 $(2, 2)$,
半径 1 の円の周およびその内部である
から, 求める領域は右の図の斜線部分
で境界線を含む.



(2) $(x, y) = (a_1 - a_2, a_3 - a_4)$ が (1) の領域に含まれるのは

$$(|a_1 - a_2|, |a_3 - a_4|) = (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2)$$

のときで, これらの場合の数は, それぞれ

$$10 \cdot 8, 8 \cdot 10, 8 \cdot 8, 8 \cdot 6, 6 \cdot 8$$

よって, 求める確率は $\frac{80 + 80 + 64 + 48 + 48}{6^4} = \frac{20}{81}$ ■