

平成21年度 大阪大学 2次試験前期日程(数学問題)90分
文・法・経済・医(看護)・外国語・人間科学 数I・II・A・B

問題 1 2 3

1 曲線 $C: y = x^3 - kx$ (k は実数) を考える. C 上に点 $A(a, a^3 - ka)$ ($a \neq 0$) をとる. 次の問いに答えよ.

- (1) 点 A における C の接線を ℓ_1 とする. ℓ_1 と C の A 以外の交点を B とする. B の x 座標を求めよ.
- (2) 点 B における C の接線を ℓ_2 とする. ℓ_1 と ℓ_2 が直交するとき, a と k がみたす条件を求めよ.
- (3) ℓ_1 と ℓ_2 が直交する a が存在するような k の値の範囲を求めよ.

2 平面上の三角形 OAB を考え,

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \quad t = \frac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|}$$

とおく. 辺 OA を $1:2$ に内分する点を C とし, $\overrightarrow{OD} = t\vec{b}$ となる点を D とする. $\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{OB}$ が直交し, $\overrightarrow{BC}$ と $\overrightarrow{OA}$ が直交するとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $\angle AOB$ を求めよ.
- (2) t の値を求めよ.
- (3) AD と BC の交点を P とするとき, $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ.

3 次のような, いびつなさいころを考える. 1, 2, 3 の目が出る確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$, 4 の目が出る確率は a , 5, 6 の目が出る確率はそれぞれ $\frac{1}{4} - \frac{a}{2}$ である. ただし, $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ とする.

このさいころを振ったとき, 平面上の (x, y) にある点 P は, 1, 2, 3 のいずれかの目が出ると $(x+1, y)$ に, 4 の目が出ると $(x, y+1)$ に, 5, 6 のいずれかの目が出ると $(x-1, y-1)$ に移動する.

原点 $(0, 0)$ にあった点 P が, k 回さいころを振ったときに $(2, 1)$ にある確率を p_k とする.

- (1) p_1, p_2, p_3 を求めよ.
- (2) p_6 を求めよ.
- (3) p_6 が最大となるときの a の値を求めよ.

解答例

1 (1) $f(x) = x^3 - kx$ とおくと $f'(x) = 3x^2 - k$

C 上の点 $A(a, a^3 - ka)$ における接線の方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

これと $C: y = f(x)$ の共有点の x 座標は

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで} \quad f(x) - f(a) &= x^3 - kx - (a^3 - ka) \\ &= (x - a)(x^2 + ax + a^2 - k), \\ f'(a) &= 3a^2 - k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad (x - a)(x^2 + ax + a^2 - k) &= (3a^2 - k)(x - a) \\ (x - a)(x^2 + ax - 2a^2) &= 0 \\ (x - a)^2(x + 2a) &= 0 \end{aligned}$$

このとき, $x \neq a$ であるから $x = -2a$

(2) $f'(a)f'(-2a) = -1$ であるから $(3a^2 - k)(12a^2 - k) = -1$

(3) (2) の結果を a について整理すると $36a^4 - 15ka^2 + k^2 + 1 = 0$

ここで, $t = 3a^2$ とおくと $4t^2 - 5kt + k^2 + 1 = 0$

上の t に関する 2 次方程式が $t > 0$ をみたす解をもてばよい. この方程式の 2 解を α, β , 判別式を D とすると

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \frac{5k}{4}, \quad \alpha\beta = \frac{k^2 + 1}{4} > 0, \\ D &= (-5k)^2 - 4 \cdot 4(k^2 + 1) = 9k^2 - 16 \end{aligned}$$

$\alpha + \beta > 0$, $D \geq 0$ を満たせばよいから

$$\frac{5k}{4} > 0, \quad 9k^2 - 16 \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad k \geq \frac{4}{3}$$



- 2 (1) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = t\vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{OB}$ より, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ であるから

$$(t\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t|\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

上の第2式に $t = \frac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|}$ を代入すると

$$\frac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|} \cdot |\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \cos \angle AOB = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって} \quad \angle AOB = \frac{\pi}{3}$$

- (2) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{OA}$ より, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$ であるから

$$\left(\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}\right) \cdot \vec{a} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{3}|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|$ を上の第2式に代入すると

$$\frac{1}{3}|\vec{a}|^2 = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}| \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|} = \frac{3}{4}$$

- (3) $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = 3\overrightarrow{OC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{OD}$

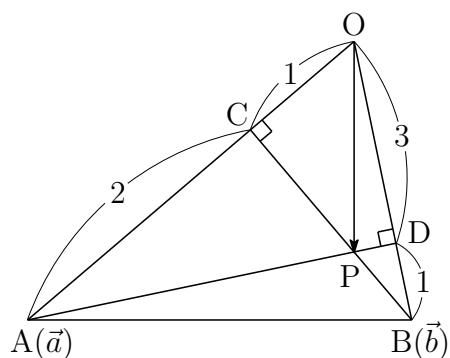
$\overrightarrow{OP} = x\vec{a} + y\vec{b}$ とおくと

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = 3x\overrightarrow{OC} + y\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + \frac{4}{3}y\overrightarrow{OD} \end{cases}$$

P は BC および AD 上の点であるから

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x + \frac{4}{3}y = 1 \end{cases}$$

これを解いて $x = \frac{1}{9}$, $y = \frac{2}{3}$ よって $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{9}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ ■



3 (1) 1, 2, 3 のいずれかの目が出る事象 L の確率は $3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

4 の目が出る事象 M の確率は a

5, 6 のいずれかの目が出る事象 N の確率は $2 \left(\frac{1}{4} - \frac{a}{2} \right) = \frac{1}{2} - a$

k 回さいころを振ったときに, L が l 回, M が m 回, N が n 回起こる確率は $(k = l + m + n)$

$$\frac{k!}{l!m!n!} \left(\frac{1}{2} \right)^l a^m \left(\frac{1}{2} - a \right)^n \cdots (*)$$

原点にあった点 P が, k 回さいころを振って $(2, 1)$ にあるのは $k \geq 3$ のときであるから

$$p_1 = p_2 = 0$$

原点にあった点 P が, 3 回さいころを振って $(2, 1)$ にあるのは, L が 2 回, M が 1 回, N が 0 回起きるときであるから, $(*)$ より

$$p_3 = \frac{3!}{2!1!} \left(\frac{1}{2} \right)^2 a = \frac{3}{4} a$$

(2) さいころを 6 回振り, L が l 回, M が m 回, N が n 回起きて, P が $(2, 1)$ にあるとき

$$l - n = 2, \quad m - n = 1, \quad l + m + n = 6$$

これを解いて $l = 3, m = 2, n = 1$

$(*)$ より, 求める確率 p_6 は

$$p_6 = \frac{6!}{3!2!1!} \left(\frac{1}{2} \right)^3 a^2 \left(\frac{1}{2} - a \right) = \frac{15}{4} a^2 (1 - 2a)$$

(3) (2) の結果から, $f(a) = a^2(1 - 2a)$ とおくと $\left(0 \leq a \leq \frac{1}{2} \right)$

$$f'(a) = 2a - 6a^2 = 2a(1 - 3a)$$

したがって, $f(a)$ の増減表は次のようになる.

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$f'(a)$		+	0	-	
$f(a)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{27}$	$\searrow$	0

$p_6 = \frac{15}{4} f(a)$ であるから, p_6 を最大にする a の値は $a = \frac{1}{3}$ ■