

平成19年度 大阪大学 2次試験前期日程(数学問題)90分
 文・法・経済・医(看護)・外国語・人間科学 数I・II・A・B

問題 1 2 3

1 xy 平面において、放物線 $y = x^2$ を C とする．また、実数 k を与えたとき、 $y = x + k$ で定まる直線を l とする．

- (1) $-2 < x < 2$ の範囲で C と l が2点で交わる時、 k の満たす条件を求めよ．
- (2) k が (1) の条件を満たすとき、 C と l および2直線 $x = -2$, $x = 2$ で囲まれた3つの部分の面積の和 S を k の式で表せ．

2 n を2以上の自然数とする．1つのさいころを n 回投げ、第1回目から第 n 回目までに目出た目の最大公約数を G とする．

- (1) $G = 3$ となる確率を n の式で表せ．
- (2) G の期待値を n の式で表せ．

3 xy 平面において、原点 O を通る半径 r ($r > 0$) の円を C とし、その中心を A とする． O を除く C 上の点 P に対し、次の2つの条件 (a), (b) で定まる点 Q を考える．

- (a) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ の向きが同じ．
- (b) $|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}| = 1$

以下の問いに答えよ．

- (1) 点 P が O を除く C 上を動くとき、点 Q は $\overrightarrow{OA}$ に直交する直線上を動くことを示せ．
- (2) (1) の直線を l とする． l が C と2点で交わる時、 r のとりうる値の範囲を求めよ．

解答例

- 1 (1) $C: y = x^2$ と $l: y = x + k$ の方程式から y を消去すると

$$x^2 = x + k \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - x - k = 0 \quad \cdots (*)$$

C と l は異なる 2 点を共有するから、係数について

$$(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-k) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad k > -\frac{1}{4} \quad \cdots \textcircled{1}$$

(*) より、 $f(x) = x^2 - x - k$ とおくと、 $f(-2) > 0$, $f(2) > 0$ より

$$6 - k > 0, \quad 2 - k > 0 \quad \text{すなわち} \quad k < 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

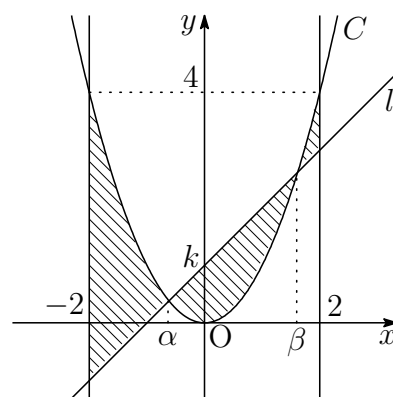
①, ② より、条件を満たす k の値の範囲は $-\frac{1}{4} < k < 2$

- (2) (*) の解を α , β とすると ($\alpha < \beta$)

$$\alpha = \frac{1 - \sqrt{1 + 4k}}{2},$$

$$\beta = \frac{1 + \sqrt{1 + 4k}}{2}$$

$f(x) = x^2 - x - k = (x - \alpha)(x - \beta)$ の原始関数を $F(x)$ とする. 求める面積 S は、右の図の斜線部分であるから



$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{\alpha} f(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^2 f(x) dx \\ &= \left[F(x) \right]_{-2}^{\alpha} - \left[F(x) \right]_{\alpha}^{\beta} + \left[F(x) \right]_{\beta}^2 \\ &= 2F(\alpha) - 2F(\beta) + F(2) - F(-2) \\ &= 2 \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx + \int_{-2}^2 f(x) dx \\ &= 2 \left(-\frac{1}{6} \right) (\alpha - \beta)^3 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - kx \right]_{-2}^2 \\ &= \frac{1}{3} (\beta - \alpha)^3 + \frac{16}{3} - 4k \\ &= \frac{1}{3} (1 + 4k)^{\frac{3}{2}} + \frac{16}{3} - 4k \end{aligned}$$

- 2 (1) 出た目が n 回とも 3 または 6 の倍数である確率は $\left(\frac{2}{6}\right)^n$

出た目が n 回とも 6 の倍数である確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^n$

したがって, $G = 3$ となる確率は $\left(\frac{2}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{2^n - 1}{6^n}$

- (2) $G = 4, G = 5, G = 6$ となる確率は, ともに $\left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{1}{6^n}$

$G = 2$ となる確率は, n 回とも偶数の目である確率から $G = 4$ および $G = 6$ となる確率を引いたものであるから

$$\left(\frac{3}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{3^n - 2}{6^n}$$

$G = 1$ となる確率は, $G = 2, 3, 4, 5, 6$ である場合の余事象の確率であるから

$$1 - \left(\frac{3^n - 2}{6^n} + \frac{2^n - 1}{6^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{6^n} \right) = \frac{6^n - 3^n - 2^n}{6^n}$$

よって, 求める期待値は

$$\begin{aligned} & 1 \cdot \frac{6^n - 3^n - 2^n}{6^n} + 2 \cdot \frac{3^n - 2}{6^n} + 3 \cdot \frac{2^n - 1}{6^n} + 4 \cdot \frac{1}{6^n} + 5 \cdot \frac{1}{6^n} + 6 \cdot \frac{1}{6^n} \\ &= \frac{6^n + 3^n + 2^{n+1} + 8}{6^n} \end{aligned}$$

- 3 (1) O を極とし, A を通る始線 OX をとると

$$OP = 2r \cos \theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$|\vec{OP}| |\vec{OQ}| = 1 \text{ より } OQ = \frac{1}{2r \cos \theta}$$

点 Q から始線 OX に垂線 QH を引くと

$$OH = OQ \cos \theta = \frac{1}{2r}$$

よって, 点 Q は図の H を通り始線 OX に垂直な直線上にある.

- (2) l と C が 2 点で交わるとき, 上の図から

$$\frac{1}{2r} < 2r \quad \text{ゆえに} \quad (2r + 1)(2r - 1) > 0 \quad \text{よって} \quad r > \frac{1}{2}$$

