

平成18年度 大阪大学 2次試験前期日程 (数学問題)90分
文・法・経済・医(看護)・外国語・人間科学 数I・II・A・B

問題 1 2 3

1 a を実数とし, 関数

$$f(x) = x^3 - 3ax + a$$

を考える. $0 \leq x \leq 1$ において

$$f(x) \geq 0$$

となるような a の範囲を求めよ.

2 自然数 m, n と $0 < a < 1$ を満たす実数 a を, 等式

$$\log_2 6 = m + \frac{1}{n+a}$$

が成り立つようにとる. 以下の問いに答えよ.

(1) 自然数 m, n を求めよ.

(2) 不等式 $a > \frac{2}{3}$ が成り立つことを示せ.

3 xy 平面上の点 $A(1, 2)$ を通る直線 l が x 軸, y 軸とそれぞれ点 P, Q で交わり, 点 R を

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OR}$$

を満たすようにとる. ただし, O は xy 平面の原点である. このとき, 直線 l の傾きにかかわらず, 点 R はある関数 $y = f(x)$ のグラフ上にある. 関数 $f(x)$ を求めよ.

解答例

1 $0 \leq x \leq 1$ において, $f(x) \geq 0$ となるためには

$$f(0) = a \geq 0, \quad f(1) = 1 - 2a \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 \leq a \leq \frac{1}{2}$$

であることが必要条件である.

(i) $a = 0$ のとき, $f(0) = 0$, $f'(x) \geq 0$ であるから, $a = 0$ は条件を満たす.

(ii) $0 < a \leq \frac{1}{2}$ のとき, $f'(x) = 3x^2 - 3a = 3(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a})$ より

x	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$0 \leq x \leq 1$ において, $f(x) \geq 0$ となる条件は

$$f(\sqrt{a}) = -2a\sqrt{a} + a = a(1 - 2\sqrt{a}) \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < a \leq \frac{1}{4}$$

(i), (ii) より, 求める a の値の範囲は $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$



2 (1) $2 = \log_2 4 < \log_2 6 < \log_2 8 = 3$, $0 < \frac{1}{n+a} < 1$ より

$$\log_2 6 = m + \frac{1}{n+a} \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たす自然数 m は $\mathbf{m = 2}$

これを $\textcircled{1}$ に代入して整理すると

$$\log_2 \frac{3}{2} = \frac{1}{n+a} \quad \text{ゆえに} \quad n+a = \log_{\frac{3}{2}} 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

n は自然数, $0 < a < 1$, $1 = \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{2} < \log_{\frac{3}{2}} 2 < \log_{\frac{3}{2}} \frac{9}{4} = 2$ であるから

$$\mathbf{n = 1}$$

(2) (1) の結果を $\textcircled{2}$ に代入して整理すると

$$a = \log_{\frac{3}{2}} \frac{4}{3} \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^a = \frac{4}{3}$$

上の第2式の両辺を3乗すると

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{3a} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} > \frac{9}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{3a} > \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\text{したがって} \quad 3a > 2 \quad \text{よって} \quad a > \frac{2}{3}$$

■

3 点 A(1, 2) を通る直線 l が x 軸, y 軸と共有点をもつから, x 軸および y 軸と平行ではない. l の傾きを t とすると ($t \neq 0$)

$$y - 2 = t(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = tx - t + 2$$

$$\text{したがって} \quad P\left(-\frac{2}{t} + 1, 0\right), Q(0, -t + 2)$$

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OR} \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA} \\ &= \left(-\frac{2}{t} + 1, 0\right) + (0, -t + 2) - (1, 2) \\ &= \left(-\frac{2}{t}, -t\right) \end{aligned}$$

$$R(x, y) \text{ とおくと} \quad x = -\frac{2}{t}, y = -t \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{2}{x} \quad \text{よって} \quad \mathbf{f(x) = \frac{2}{x}} \quad \blacksquare$$