

平成 15 年度 大阪大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 90 分
 文・法・経済・医 (看護)・外国語・人間科学 数 I・II・A・B

問題 1 2 3

- 1 平面ベクトル $\vec{p} = (p_1, p_2)$, $\vec{q} = (q_1, q_2)$ に対して $\{\vec{p}, \vec{q}\} = p_1q_2 - p_2q_1$ と定める.

- (1) 平面ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ に対して $\{\vec{a}, \vec{b}\} = \ell$, $\{\vec{b}, \vec{c}\} = m$, $\{\vec{c}, \vec{a}\} = n$ とするとき

$$\ell\vec{c} + m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$$

が成り立つことを示せ.

- (2) (1) で ℓ, m, n がすべて正であるとする. このとき任意の平面ベクトル $\vec{d}$ は 0 以上の実数 r, s, t を用いて

$$\vec{d} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$$

と表すことができることを示せ.

- 2 自然数 m に対して, m の相異なる素因数をすべてかけあせたものを $f(m)$ で表すことにする. たとえば $f(72) = 6$ である. ただし $f(1) = 1$ とする.

- (1) m, n を自然数, d を m, n の最大公約数とするとき

$$f(d)f(mn) = f(m)f(n)$$

となることを示せ.

- (2) 2 つの箱 A, B のそれぞれに 1 番から 10 番までの番号札が 1 枚ずつ 10 枚入っている. 箱 A, B から 1 枚ずつ札を取り出す. 箱 A から取り出した札の番号を m , 箱 B から取り出した札の番号を n とするとき

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

となる確率 p_1 と

$$2f(mn) = f(m)f(n)$$

となる確率 p_2 を求めよ.

- 3 放物線 $C: y = -x^2 + 2x + 1$ と x 軸の共有点を $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ とし, C と直線 $y = mx$ の共有点を $P(\alpha, m\alpha)$, $Q(\beta, m\beta)$, 原点を O とする. ただし $a < b$, $m \neq 0$, $\alpha < \beta$ とする. 線分 OP , OA と C で囲まれた図形の面積と線分 OQ , OB と C で囲まれた図形の面積が等しいとき m の値を求めよ.

解答例

1 (1) $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$, $\vec{c} = (c_1, c_2)$ とおくと

$$\ell = \{\vec{a}, \vec{b}\} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$m = \{\vec{b}, \vec{c}\} = b_1c_2 - b_2c_1$$

$$n = \{\vec{c}, \vec{a}\} = c_1a_2 - c_2a_1$$

$\ell\vec{c} + m\vec{a} + n\vec{b} = (x, y)$ とおくと

$$\begin{aligned} x &= (a_1b_2 - a_2b_1)c_1 + (b_1c_2 - b_2c_1)a_1 + (c_1a_2 - c_2a_1)b_1 \\ &= (a_1b_2 - a_2b_1)c_1 + \overline{a_1b_1c_2} - a_1b_2c_1 + a_2b_1c_1 - \overline{a_1b_1c_2} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= (a_1b_2 - a_2b_1)c_2 + (b_1c_2 - b_2c_1)a_2 + (c_1a_2 - c_2a_1)b_2 \\ &= (a_1b_2 - a_2b_1)c_2 + a_2b_1c_2 - \overline{a_2b_2c_1} + \overline{a_2b_2c_1} - a_1b_2c_2 = 0 \end{aligned}$$

よって $\ell\vec{c} + m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{0}$

(2) $\ell \neq 0$ より, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行ではないから, 任意のベクトル $\vec{d}$ に対して

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \quad (\alpha, \beta \text{ は実数})$$

とおける. 正の実数 k を用いて, (1) の結果から

$$k(\ell\vec{c} + m\vec{a} + n\vec{b}) = \vec{0}$$

上の 2 式から $\vec{d} = (km + \alpha)\vec{a} + (kn + \beta)\vec{b} + k\ell\vec{c}$

ℓ, m, n はすべて正であるから, $km + \alpha \geq 0, kn + \beta \geq 0$ を満たす正の実数 k をとり, $r = km + \alpha, s = kn + \beta, t = k\ell$ とおくと

$$\vec{d} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \quad (r, s, t \text{ は } 0 \text{ 以上の実数})$$

別解 O を始点する 3 点 $A(m\vec{a})$, $B(n\vec{b})$, $C(\ell\vec{c})$ を頂点とする $\triangle ABC$ の重心は, (1) の結果から O である. O を端点する半直線 OA, OB, OC によってできた領域を考える. このとき, $\vec{d} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c}$ について

点 $D(\vec{d})$ が半直線 OA 上にあるとき $r \geq 0, s = t = 0$.

点 $D(\vec{d})$ が他の半直線上にある場合も同様.

点 $D(\vec{d})$ が半直線 OA, OB による C を含まない開領域にあるとき

$$r > 0, s > 0, t = 0.$$

点 $D(\vec{d})$ が他の開領域にある場合も同様. ■

- 2** (1) m, n, d それぞれの素因数の積を P, Q, R とすると, mn の素因数の積は, m 固有の素因数の積 $\frac{P}{R}$, n 固有の素因数の積 $\frac{Q}{R}$, m と n に共通する素因数の積 R の積であるから

$$\frac{P}{R} \cdot \frac{Q}{R} \cdot R = \frac{PQ}{R} \quad \text{ゆえに} \quad f(mn) = \frac{f(m)f(n)}{f(d)}$$

$$\text{よって} \quad f(d)f(mn) = f(m)f(n)$$

別解 自然数 m, n を構成する素数の集合をそれぞれ A, B とすると

$$f(mn) = \prod_{p_i \in A \cup B} p_i = \prod_{p_i \in A} p_i \prod_{p_i \in B} p_i \bigg/ \prod_{p_i \in A \cap B} p_i = \frac{f(m)f(n)}{f(d)}$$

- (2) (1) の結果から, p_1, p_2 はそれぞれ $f(d) = 1, f(d) = 2$ となる確率である. これに該当する $f(d)$ の値は次のとおりである.

$m \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	1	1		1	1		1	1		1
4	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
5	1	1	1	1		1	1	1	1	
6	1	2		2	1		1	2		2
7	1	1	1	1	1	1		1	1	1
8	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
9	1	1		1	1		1	1		1
10	1	2	1	2		2	1	2	1	

$$\text{よって} \quad p_1 = \frac{63}{100}, \quad p_2 = \frac{23}{100}$$



- 3** 線分 OP, OA と C で囲まれた図形の面積を S , 線分 OQ, OB と C で囲まれた図形の面積を T とし, 曲線 C と直線 $y = mx$ で囲まれた部分で x 軸の上側の部分の面積を U とする. $S = T$ より, $S + U = U + T$ である.

(i) $m > 0$ のとき

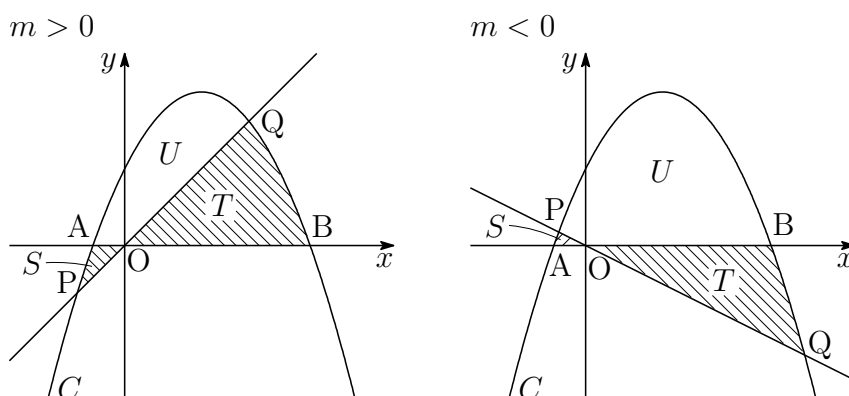
$$S + U = \int_{\alpha}^{\beta} \{(-x^2 + 2x + 1) - mx\} dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

$$U + T = \int_a^b (-x^2 + 2x + 1) dx = \frac{1}{6}(b - a)^3$$

(ii) $m < 0$ のとき

$$S + U = \int_a^b (-x^2 + 2x + 1) dx = \frac{1}{6}(b - a)^3$$

$$U + T = \int_{\alpha}^{\beta} \{(-x^2 + 2x + 1) - mx\} dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$



$S + U = U + T$ であるから, (i), (ii) より $b - a = \beta - \alpha \quad \cdots (*)$

a, b は 2 次方程式 $-x^2 + 2x + 1 = 0$ の解であるから ($a < b$)

$$b - a = (1 + \sqrt{2}) - (1 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

α, β は 2 次方程式 $-x^2 + 2x + 1 - mx = 0$, すなわち, $x^2 + (m - 2)x - 1 = 0$ の解であるから ($\alpha < \beta$)

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= \frac{2 - m + \sqrt{(m - 2)^2 + 4}}{2} - \frac{2 - m - \sqrt{(m - 2)^2 + 4}}{2} \\ &= \sqrt{(m - 2)^2 + 4} \end{aligned}$$

ゆえに $\sqrt{(m - 2)^2 + 4} = 2\sqrt{2}$ 条件 $m \neq 0$ に注意して $m = 4$ ■