

平成14年度 大阪大学 2次試験前期日程(数学問題)90分
 文・法・経済・医(看護)・外国語・人間科学 数I・II・A・B

問題 1 2 3

1 次の問いに答えよ.

(1) 実数の定数 p に対して, 3次方程式 $x^3 + x - p = 0$ の実数解の個数は1個であることを示せ.

(2) p, q は定数で $p \geq 2, q \geq 2$ とする. 2つの3次方程式

$$x^3 + x - p = 0, \quad x^3 + x - q = 0$$

の実数解をそれぞれ α, β とするとき,

$$|\alpha - \beta| \leq \frac{1}{4}|p - q|$$

が成立することを示せ.

2 平面上に3つの放物線

$$C_1: y = -x(x-1), \quad C_2: y = x(x-1), \quad C: y = \frac{1}{2}x^2 + ax + b$$

を考える. いま実数 t に対して, C は C_1 上の点 $(t, -t^2 + t)$ を通り, その点で C_1 と共通の接線をもつとする.

(1) a, b を t を用いて表せ.

(2) 2つの放物線 C, C_2 で囲まれた部分の面積 S を t を用いて表せ.

(3) t を動かすとき, S の最小値を求めよ.

3 平面上に原点 O を中心とする半径1の円 K_1 を考える. K_1 の直径を1つとり, その両端を A, B とする. 円 K_1 の周上の任意の点 Q に対し, 線分 QA を1:2の比に内分する点を R とする. いま k を正の定数として,

$$\vec{p} = \vec{AQ} + k\vec{BR}$$

とおく. ただし, $Q = A$ のときは $R = A$ とする. また, $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OQ} = \vec{q}$ とおく.

(1) $\vec{BR}$ を $\vec{a}, \vec{q}$ を用いて表せ.

(2) 点 Q が円 K_1 の周上を動くとき, $\vec{OP} = \vec{p}$ となるような点 P がえがく図形を K_2 とする. K_2 は円であることを示し, 中心の位置ベクトルと半径を求めよ.

(3) 円 K_2 の内部に点 A が含まれるような k の値の範囲を求めよ.

解答例

1 (1) $f(x) = x^3 + x$ とおくと $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$

$y = f(x)$ のグラフは単調増加であるから、曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = p$ の共有点の個数は1個。したがって、3次方程式

$$x^3 + x = p \quad \text{すなわち} \quad x^3 + x - p = 0$$

の実数解の個数は 1 個

(2) $f(x)$ は単調増加で、 $f(1) = 2$ であるから、 $p \geq 2, q \geq 2$ について、

$$f(\alpha) = p, \quad f(\beta) = q$$

を満たす α, β は $\alpha \geq 1, \beta \geq 1$

$$\begin{aligned} |p - q| &= |f(\alpha) - f(\beta)| = |(\alpha^3 + \alpha) - (\beta^3 + \beta)| \\ &= |\alpha - \beta| |\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + 1| \\ &\geq |\alpha - \beta| (1^2 + 1 \cdot 1 + 1^2 + 1) = 4|\alpha - \beta| \end{aligned}$$

よって $|\alpha - \beta| \leq \frac{1}{4}|p - q|$

補足 $\alpha = \beta$ のとき、明らかに成立する。

$\alpha \neq \beta$ のとき、2点 $(\alpha, f(\alpha)), (\beta, f(\beta))$ を通る直線の傾きを m とすると

$$m = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{q - p}{\beta - \alpha}$$

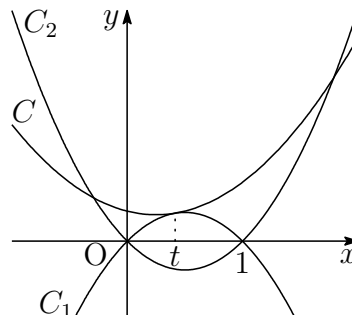
$\alpha \geq 1, \beta \geq 1$ であるから、 $m \geq f'(1)$ より

$$\frac{q - p}{\beta - \alpha} \geq 4 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{|q - p|}{|\beta - \alpha|} \geq 4 \quad \text{よって} \quad |\alpha - \beta| \leq \frac{1}{4}|p - q|$$



- 2 (1) $C: y = \frac{1}{2}x^2 + ax + b$ より $y' = x + a$
 $C_1: y = -x(x-1)$ より $y' = -2x + 1$
 C と C_1 が点 $(t, -t^2 + t)$ で共通の接線をもつから

$$\begin{cases} \frac{1}{2}t^2 + at + b = -t^2 + t \\ t + a = -2t + 1 \end{cases}$$



これを解いて $a = -3t + 1$, $b = \frac{3}{2}t^2$

- (2) (1) の結果から $C: y = \frac{1}{2}x^2 + (-3t + 1)x + \frac{3}{2}t^2$

C と C_2 の共有点の x 座標を α , β とすると ($\alpha < \beta$), x^2 の係数に注意して

$$\frac{1}{2}x^2 + (-3t + 1)x + \frac{3}{2}t^2 - x(x-1) = -\frac{1}{2}(x-\alpha)(x-\beta)$$

上式の左辺を $f(x)$ とすると

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + (-3t + 2)x + \frac{3}{2}t^2$$

α , β は, $f(x) = 0$, すなわち, $x^2 - 2(-3t + 2)x - 3t^2 = 0$ の解であるから

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= -3t + 2 + \sqrt{12t^2 - 12t + 4} - \left(-3t + 2 - \sqrt{12t^2 - 12t + 4}\right) \\ &= 4\sqrt{3t^2 - 3t + 1} \end{aligned}$$

したがって, 求める面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^3 = \frac{16}{3}(3t^2 - 3t + 1)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

- (3) (2) の結果から $S = \frac{16}{3} \left\{ 3 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \right\}^{\frac{3}{2}} \geq \frac{2}{3}$

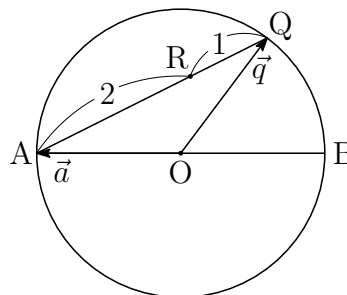
よって, $t = \frac{1}{2}$ のとき, S は最小値 $\frac{2}{3}$ をとる. ■

- 3** (1) 点 R は線分 QA を 1 : 2 の比に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2\vec{q} + \vec{a}}{1+2} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{q}$$

また, $\overrightarrow{OB} = -\vec{a}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BR} &= \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{q} - (-\vec{a}) \\ &= \frac{4}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{q}\end{aligned}$$



- (2) $\vec{p} = \overrightarrow{AQ} + k\overrightarrow{BR}$ に (1) の結果を代入すると

$$\vec{p} = \vec{q} - \vec{a} + k\left(\frac{4}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{q}\right) = \left(\frac{4}{3}k - 1\right)\vec{a} + \left(\frac{2}{3}k + 1\right)\vec{q}$$

よって, 点 P のえがく図形は, 中心 $\left(\frac{4}{3}k - 1\right)\vec{a}$, 半径 $\frac{2}{3}k + 1$ の円

- (3) (2) で求めた円 K_2 の中心を C とすると $\overrightarrow{OC} = \left(\frac{4}{3}k - 1\right)\vec{a}$

$$\overrightarrow{CA} = \vec{a} - \left(\frac{4}{3}k - 1\right)\vec{a} = \left(2 - \frac{4}{3}k\right)\vec{a} \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{CA}| = \left|2 - \frac{4}{3}k\right|$$

A が円 K_2 の内部に含まれる条件は $|\overrightarrow{CA}| < \frac{2}{3}k + 1$

$$-\left(\frac{2}{3}k + 1\right) < 2 - \frac{4}{3}k < \frac{2}{3}k + 1 \quad \text{よって} \quad \frac{1}{2} < k < \frac{9}{2}$$

■