

平成26年度 名古屋大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・農・医・情報文化(自然情報) 数I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4

1 空間内にある半径1の球(内部を含む)を B とする. 直線 ℓ と B が交わっており, その交わりは長さ $\sqrt{3}$ の線分である.

(1) B の中心と ℓ との距離を求めよ.

(2) ℓ のまわりに B を1回転してできる立体の体積を求めよ.

2 実数 t に対して2点 $P(t, t^2)$, $Q(t+1, (t+1)^2)$ を考える. t が $-1 \leq t \leq 0$ の範囲を動くとき, 線分 PQ が通過してできる図形を図示し, その面積を求めよ.

3 xy 平面の $y \geq 0$ の部分にあり, x 軸に接する円の列 $C_1, C_2, C_3, \dots$ を次のように定める.

- C_1 と C_2 は半径1の円で, 互いに外接する.
- 正の整数 n に対し, C_{n+2} は C_n と C_{n+1} に外接し, C_n と C_{n+1} の弧および x 軸で囲まれる部分にある.

円 C_n の半径を r_n とする.

(1) 等式 $\frac{1}{\sqrt{r_{n+2}}} = \frac{1}{\sqrt{r_n}} + \frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}$ を示せ.

(2) すべての正の整数 n に対して $\frac{1}{\sqrt{r_n}} = s\alpha^n + t\beta^n$ が成り立つように, n によらない定数 α, β, s, t の値を一組与えよ.

(3) $n \rightarrow \infty$ のとき数列 $\left\{\frac{r_n}{k^n}\right\}$ が正の値に収束するように実数 k の値を定め, そのときの極限値を求めよ.

4 負でない整数 N が与えられたとき, $a_1 = N$, $a_{n+1} = \left[\frac{a_n}{2}\right]$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)として数列 $\{a_n\}$ を定める. ただし $[a]$ は, 実数 a の整数部分($k \leq a < k+1$ となる整数 k)を表す.

(1) $a_3 = 1$ となるような N をすべて求めよ.

(2) $0 \leq N < 2^{10}$ をみたす整数 N のうちで, N から定まる数列 $\{a_n\}$ のある項が2となるようなものはいくつあるか.

(3) 0から $2^{100} - 1$ までの 2^{100} 個の整数から等しい確率で N を選び, 数列 $\{a_n\}$ を定める. 次の条件(*)をみたす最小の正の整数 m を求めよ.

(*) 数列 $\{a_n\}$ のある項が m となる確率が $\frac{1}{100}$ 以下となる.

解答例

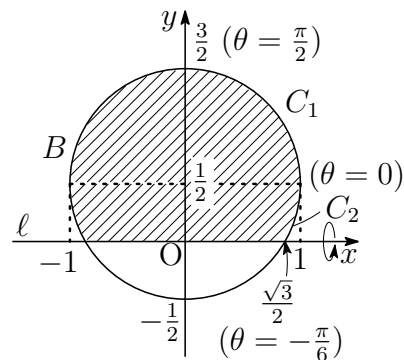
- 1 (1) ℓ と B の中心の距離は

$$\sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

- (2) 右の図の半径 1 の円 C の点 (x, y) を

$$x = \cos \theta, \quad y = \sin \theta + \frac{1}{2}$$

とする. $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq 0$ の部分をそれぞれ C_1 , C_2 とすると, 求める回転体の体積 V は



$$\begin{aligned} \frac{V}{2\pi} &= \int_{C_1} y^2 dx - \int_{C_2} y^2 dx = \int_0^1 y^2 dx - \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 y^2 dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 y^2 \frac{dx}{d\theta} d\theta - \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 y^2 \frac{dx}{d\theta} d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} y^2 \frac{dx}{d\theta} d\theta \end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned} y^2 dx &= y^2 \frac{dx}{d\theta} d\theta = \left(\sin \theta + \frac{1}{2} \right)^2 (\cos \theta)' d\theta \\ &= -\frac{1}{4} (4 \sin^3 \theta + 4 \sin^2 \theta + \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{4} (\sin 3\theta + 2 \cos 2\theta - 4 \sin \theta - 2) d\theta \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{V}{2\pi} &= \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} (\sin 3\theta + 2 \cos 2\theta - 4 \sin \theta - 2) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{3} \cos 3\theta + \sin 2\theta + 4 \cos \theta - 2\theta \right]_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

よって $V = \pi \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{3\sqrt{3}}{4} \right)$

別解 右図の D_1 , D_2 の面積をそれぞれ S_1 , S_2 とすると, $\angle PCQ = \frac{2\pi}{3}$ であるから

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_2 = \pi \cdot 1^2 - 2S_1 = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$y = \frac{1}{2} + \sqrt{1-x^2} \ (-1 \leq x \leq 1) \cdots (*)$ とすると

$$\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (y-1) dx = S_1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

D_1 および D_2 を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1 , V_2 とする. $(*)$ より, $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 1$ であるから

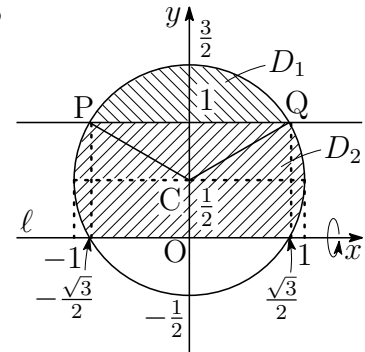
$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (y^2 - 1^2) dx \\ &= \pi \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (y-1) dx + \pi \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{3}{4} - x^2 \right) dx \\ &= \pi S_1 + \pi \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + x \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x \right) dx \\ &= \pi \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) + \frac{\pi}{6} (\sqrt{3})^3 = \pi \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \end{aligned}$$

D_2 の境界を表す 2 曲線 $C_1: y = f(x)$, $C_2: y = g(x)$ を

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2} + \sqrt{1-x^2} & (\frac{\sqrt{3}}{2} \leq |x| \leq 1) \\ 1 & (|x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}) \end{cases} \\ g(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2} - \sqrt{1-x^2} & (\frac{\sqrt{3}}{2} \leq |x| \leq 1) \\ 0 & (|x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}) \end{cases} \end{aligned}$$

とすると

$$f(x) + g(x) = 1, \quad \int_{-1}^1 \{f(x) - g(x)\} dx = S_2$$



したがって

$$\begin{aligned}
 V_2 &= \pi \int_{-1}^1 \{f(x)^2 - g(x)^2\} dx \\
 &= \pi \int_{-1}^1 \{f(x) + g(x)\} \{f(x) - g(x)\} dx \\
 &= \pi \int_{-1}^1 \{f(x) - g(x)\} dx = \pi S_2 = \pi \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)
 \end{aligned}$$

よって、求める立体の体積を V とすると

$$V = V_1 + V_2 = \pi \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) + \pi \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \pi \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{3}{4}\sqrt{3} \right)$$

補足 D_2 の重心は $(0, \frac{1}{2})$ であるから、パップス・ギュルダンの定理¹により

$$V_2 = 2\pi S_2 \cdot \frac{1}{2} = \pi S_2 = \pi \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

■

¹<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-ri-2012.pdf> (p.6 参照)

2 2点 $P(t, t^2)$, $Q(t+1, (t+1)^2)$ を通る直線は

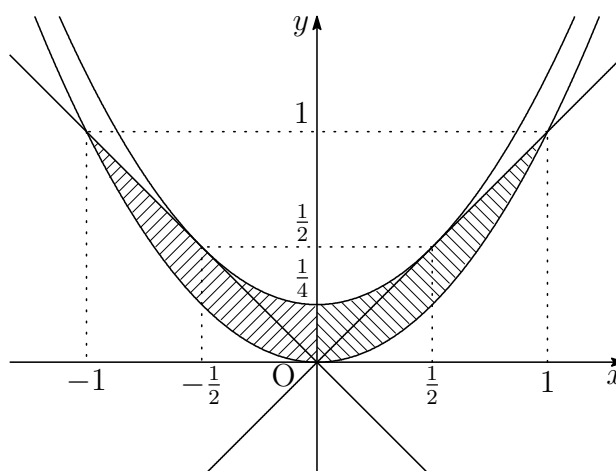
$$y - t^2 = \frac{(t+1)^2 - t^2}{(t+1) - t}(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = (2t+1)x - t^2 - t \quad \cdots \textcircled{1}$$

直線 $\textcircled{1}$ の x を固定し, y が極値をとる点では, $\frac{dy}{dt} = 0$ であるから

$$\frac{dy}{dt} = 2x - 2t - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = t + \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ から t を消去すると $y = x^2 + \frac{1}{4} \quad \cdots (*)$

$-1 \leq t \leq 0$ のとき, 線分 $P(t, t^2)$, $Q(t+1, (t+1)^2)$ が通過してできる図形は, $(*)$ が直線 PQ の包絡線であることに注意すると, その領域は, 下の図の斜線部分で, 境界線を含む.



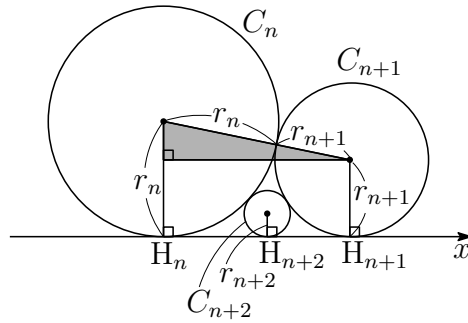
求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \int_0^1 (x - x^2) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \left(x^2 + \frac{1}{4} \right) - x \right\} dx \\ &= \int_0^1 x(1-x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{6} + \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{2} \right)^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{5}{24} \end{aligned}$$

よって $S = \frac{5}{12}$

■

- 3** (1) C_n の x 軸との接点を H_n とする.



三平方の定理により

$$H_n H_{n+1} = \sqrt{(r_n + r_{n+1})^2 - (r_n - r_{n+1})^2} = 2\sqrt{r_n r_{n+1}}$$

$$\text{同様に } H_n H_{n+2} = 2\sqrt{r_n r_{n+2}}, \quad H_{n+1} H_{n+2} = 2\sqrt{r_{n+1} r_{n+2}}$$

$H_n H_{n+1} = H_n H_{n+2} + H_{n+1} H_{n+2}$ であるから

$$2\sqrt{r_n r_{n+1}} = 2\sqrt{r_n r_{n+2}} + 2\sqrt{r_{n+1} r_{n+2}}$$

$$\text{よって } \frac{1}{\sqrt{r_{n+2}}} = \frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}} + \frac{1}{\sqrt{r_n}}$$

- (2) $a_n = \frac{1}{\sqrt{r_n}}$ とおくと, (1) の結果から

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -1 \text{ とおくと } a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$$

$$a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^{n-1}(a_2 - \beta a_1) = \alpha^{n-1}(1 - \beta) = \alpha^n$$

$$a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^{n-1}(a_2 - \alpha a_1) = \beta^{n-1}(1 - \alpha) = \beta^n$$

$$\alpha \neq \beta \text{ であるから } a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \quad s = \frac{1}{\alpha - \beta}, \quad t = -\frac{1}{\alpha - \beta}$$

α, β は 2 次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解であるから, $\alpha > \beta$ とすると

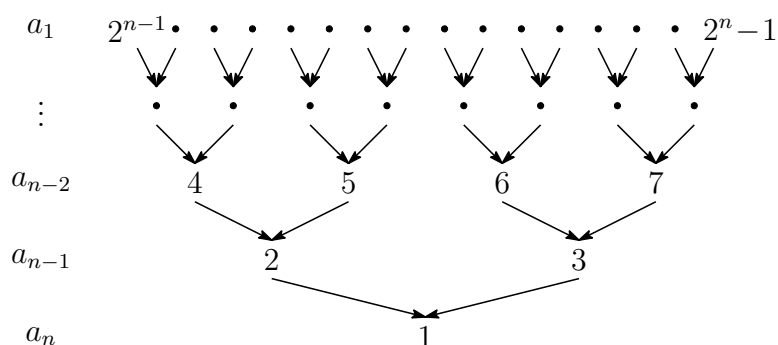
$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad s = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad t = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

- (3) (2) の結果から $r_n = \left(\frac{\sqrt{5}}{\alpha^n - \beta^n} \right)^2$ ゆえに $\frac{r_n}{k^n} = \frac{5}{(1 - \beta^{2n})^2} \left(\frac{\beta^2}{k} \right)^n$

$$\text{よって } k = \beta^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{k^n} = 5$$

■

- 4 (1) 数列 $\{a_n\}$ の推移は次のようになる.



$a_3 = 1$ となるのは, 上の推移に $n = 3$ を代入した行にある数であるから

4, 5, 6, 7

- (2) $\{a_n\}$ の推移により, 2 から $2^{10} - 1$ までの $2^{10} - 2$ 個の $\frac{1}{2}$ であるから

$$(2^{10} - 2) \times \frac{1}{2} = 2^9 - 1 = \mathbf{511} \text{ (個)}$$

- (3) $2^{k-1} \leq m \leq 2^k - 1$ のとき, 数列 $\{a_n\}$ のある項が m になる確率は

$$\frac{1}{(2^k - 1) - 2^{k-1} + 1} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

ここで, $\frac{1}{2^7} < \frac{1}{100} < \frac{1}{2^6}$ であるから

$$k - 1 = 7 \quad \text{すなわち} \quad k = 8$$

のとき, 数列 $\{a_n\}$ のある項が m になる確率は $\frac{1}{100}$ 以下となる.

ここで, $2^7 \leq m \leq 2^8 - 1$ であるから, 求める最小の m は

$$2^7 = \mathbf{128}$$

