

平成 25 年度 名古屋大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 150 分
理・工・農・医・情報文化 (自然情報) 数 I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4

- 1 3 人でジャンケンをする. 各人はグー, チョキ, パーをそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で出すものとする. 負けた人は脱落し, 残った人で次回のジャンケンを行い (アイコの場合は誰も脱落しない), 勝ち残りが 1 人になるまでジャンケンを続ける. このとき各回の試行は独立とする. 3 人でジャンケンを始め, ジャンケンが n 回目まで続いて n 回目終了時に 2 人が残っている確率を p_n , 3 人が残っている確率を q_n とおく.

- (1) p_1, q_1 を求めよ.
- (2) p_n, q_n がみたす漸化式を導き, p_n, q_n の一般項を求めよ.
- (3) ちょうど n 回目で 1 人の勝ち残りが決まる確率を求めよ.

- 2 $x > 0$ とし, $f(x) = \log x^{100}$ とおく.

- (1) 次の不等式を証明せよ.

$$\frac{100}{x+1} < f(x+1) - f(x) < \frac{100}{x}$$

- (2) 実数 a の整数部分 ($k \leq a < k+1$ となる整数 k) を $[a]$ で表す. 整数 $[f(1)], [f(2)], [f(3)], \dots, [f(1000)]$ のうちで異なるものの個数を求めよ. 必要ならば $\log 10 = 2.3026$ として計算せよ.

- 3 k, m, n は整数とし, $n \geq 1$ とする. ${}_m C_k$ を二項係数として, $S_k(n), T_m(n)$ を以下のように定める.

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k, \quad S_k(1) = 1 \quad (k \geq 0)$$

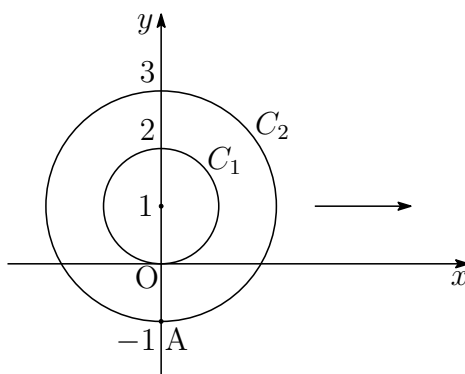
$$T_m(n) = {}_m C_1 S_1(n) + {}_m C_2 S_2(n) + {}_m C_3 S_3(n) + \dots$$

$$+ {}_m C_{m-1} S_{m-1}(n) = \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(n) \quad (m \geq 2)$$

- (1) $T_m(1)$ と $T_m(2)$ を求めよ.
- (2) 一般の n に対して $T_m(n)$ を求めよ.
- (3) p が 3 以上の素数のとき, $S_k(p-1)$ ($k = 1, 2, 3, \dots, p-2$) は p の倍数であることを示せ.

- 4 半径 1 の円盤 C_1 が半径 2 の円盤 C_2 に貼り付けられており、2つの円盤の中心は一致する． C_2 の周上にある定点を A とする．図のように、時刻 $t = 0$ において C_1 は $O(0, 0)$ で x 軸に接し、A は座標 $(0, -1)$ の位置にある．2つの円盤は一体となり、 C_1 は x 軸上をすべることなく転がっていく．時刻 t で C_1 の中心が点 $(t, 1)$ にあるように転がるとき、 $0 \leq t \leq 2\pi$ において A が描く曲線を C とする．

- (1) 時刻 t における A の座標を $(x(t), y(t))$ で表す． $(x(t), y(t))$ を求めよ．
- (2) $x(t)$ と $y(t)$ の t に関する増減を調べ、 $x(t)$ あるいは $y(t)$ が最大値または最小値をとるときの A の座標を全て求めよ．
- (3) C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．



解答例

- 1 (1) 1回のジャンケンで負ける1人の選び方は3通り、その負け方は3通り.
1回のジャンケンで1人だけが負ける、すなわち、2人が残る確率 p_1 は

$$p_1 = \frac{3 \cdot 3}{3^3} = \frac{1}{3}$$

1回のジャンケンでアイコになるのは、3人とも違う手を出す場合の $3!$ 通りと3人とも同じ手を出す場合の3通りがある. 1回のジャンケンで3人が残っている確率 q_1 は

$$q_1 = \frac{3! + 3}{3^3} = \frac{1}{3}$$

- (2) $n+1$ 回目に2人が残っているのは、 n 回目に2人が残っていて $n+1$ 回目でアイコになる場合、 n 回目に3人が残っていて $n+1$ 回目で1人脱落する場合であるから

$$p_{n+1} = p_n \cdot \frac{3}{3^2} + q_n \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n$$

$n+1$ 回目に3人が残っているのは、 n 回目に3人が残っていて $n+1$ 回目でアイコになる場合であるから

$$q_{n+1} = q_n \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}q_n$$

よって、求める漸化式は

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n, \quad q_{n+1} = \frac{1}{3}q_n$$

$\{q_n\}$ は初項 $\frac{1}{3}$ 、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから $q_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3^n}$

これを漸化式に代入すると

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3^{n+1}} \quad \text{ゆえに} \quad 3^{n+1}p_{n+1} - 3^n p_n = 1$$

$$n \geq 2 \text{ のとき} \quad \sum_{k=1}^{n-1} (3^{k+1}p_{k+1} - 3^k p_k) = \sum_{k=1}^{n-1} 1$$

$$\text{ゆえに} \quad 3^n p_n - 3p_1 = n - 1 \quad \text{したがって} \quad p_n = \frac{n}{3^n}$$

$n=1$ のときも上式は成立する.

$$\text{よって、求める一般項は} \quad p_n = \frac{n}{3^n}, \quad q_n = \frac{1}{3^n}$$

- (3) n 回目 ($n \geq 2$) で 1 人の勝ち残りが決まるのは, $n-1$ 回目に 2 人が残っていて n 回目で 1 人が脱落する場合 (脱落する 1 人の選び方が 2 通りで, その負け方が 3 通り), $n-1$ 回目に 3 人が残っていて n 回目で 2 人脱落する場合 (勝者 1 人の選び方が 3 通りで, その勝ち方が 3 通り) であるから

$$p_{n-1} \cdot \frac{2 \cdot 3}{3^2} + q_{n-1} \cdot \frac{3 \cdot 3}{3^3} = \frac{n-1}{3^{n-1}} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3^{n-1}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2n-1}{3^n}$$

上式は, $n=1$ のときも成立するから, 求める確率は $\frac{2n-1}{3^n}$ ■

- 2 (1) $f(x) = 100 \log x$ より

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= 100 \log(x+1) - 100 \log x \\ &= 100 \left[\log t \right]_x^{x+1} = 100 \int_x^{x+1} \frac{dt}{t} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x > 0 \text{ より} \quad \int_x^{x+1} \frac{dt}{x+1} &< \int_x^{x+1} \frac{dt}{t} < \int_x^{x+1} \frac{dt}{x} \\ \frac{1}{x+1} &< \int_x^{x+1} \frac{dt}{t} < \frac{1}{x} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より} \quad \frac{100}{x+1} < f(x+1) - f(x) < \frac{100}{x}$$

別解 平均値の定理により

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = f'(c) \quad (x < c < x+1)$$

$$\text{となる } c \text{ が存在する. } f(x) = 100 \log x \text{ より } f'(x) = \frac{100}{x}$$

$$\text{したがって } f(x+1) - f(x) = \frac{100}{c}, \quad \frac{100}{x+1} < \frac{100}{c} < \frac{100}{x}$$

$$\text{よって } \frac{100}{x+1} < f(x+1) - f(x) < \frac{100}{x}$$

- (2) $1 \leq x \leq 99$ のとき, (1) の結果から $f(x+1) - f(x) > 1$

ゆえに, $[f(1)], [f(2)], \dots, [f(100)]$ はすべて異なる.

$100 \leq x \leq 1000$ のとき, (1) の結果から $f(x+1) - f(x) < 1$

$$\text{ここで } f(100) = 100 \log 100 = 200 \log 10 = 460.52$$

$$f(1000) = 100 \log 1000 = 300 \log 10 = 690.78$$

$[f(100)] = 460, [f(1000)] = 690$ であるから, 460 から 690 のすべての整数が存在する. よって, 求める個数は $99 + 690 - 460 + 1 = 330$ ■

3 (1) $S_k(1) = 1^k$ であるから

$$\begin{aligned} T_m(1) &= \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(1) = \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k \\ &= \sum_{k=0}^m {}_m C_k - ({}_m C_0 + {}_m C_m) = \mathbf{2^m - 2} \end{aligned}$$

$S_k(2) = 1^k + 2^k$ であるから

$$\begin{aligned} T_m(2) &= \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(2) = \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k (1^k + 2^k) \\ &= \sum_{k=0}^m {}_m C_k (1 + 2^k) - \{{}_m C_0 (1 + 2^0) + {}_m C_m (1 + 2^m)\} \\ &= \sum_{k=0}^m {}_m C_k + \sum_{k=0}^m {}_m C_k 2^k - (3 + 2^m) \\ &= 2^m + (2 + 1)^m - (3 + 2^m) = \mathbf{3^m - 3} \end{aligned}$$

(2) $S_k(n) = \sum_{j=1}^n j^k$ であるから

$$\begin{aligned} T_m(n) &= \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(n) = \sum_{k=0}^m {}_m C_k S_k(n) - S_0(n) - S_m(n) \\ &= \sum_{k=0}^m {}_m C_k \sum_{j=1}^n j^k - n - \sum_{j=1}^n j^m \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^m {}_m C_k j^k - n - \sum_{j=1}^n j^m \\ &= \sum_{j=1}^n (j+1)^m - n - \sum_{j=1}^n j^m = \sum_{j=1}^n \{(j+1)^m - j^m\} - n \\ &= \{(n+1)^m - 1^m\} - n = \mathbf{(n+1)^m - (n+1)} \end{aligned}$$

補足 $S_k(n)$ は, $k+1$ 次の整式である¹.

¹ <http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita.2014.pdf> (p.15 を参照)

(3) (2) の結果に $n = p - 1$ を代入すると

$$T_m(p-1) = \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(p-1) = p^m - p \quad \cdots (*)$$

[1] (*) に $m = 2$ を代入すると

$${}_2 C_1 S_1(p-1) = p^2 - p \quad \text{ゆえに} \quad S_1(p-1) = \frac{p-1}{2} p$$

p は奇素数であるから, $S_1(p-1)$ は p の倍数である.

[2] (*) から

$$T_{m+1}(p-1) = \sum_{k=1}^m {}_{m+1} C_k S_k(p-1) = p^{m+1} - p \quad \cdots (**)$$

$m \leq p-2$ とする. $k = 1, 2, \dots, m-1$ に対して

$$S_k(p-1) \equiv 0 \pmod{p}$$

と仮定すると, (**) から ${}_{m+1} C_m S_m(p-1) \equiv 0 \pmod{p}$

このとき, $m+1 \leq p-1$ で, ${}_{m+1} C_m$ は p で割り切れないから

$$S_m(p-1) \equiv 0 \pmod{p}$$

[1], [2] より, p が 3 以上の素数のとき, $m = 1, 2, \dots, p-2$ に対し

$$S_m(p-1) \equiv 0 \pmod{p}$$

よって, 題意は成立する.

定理

p を奇素数, k が $p-1$ で割り切れないとき (k が $p-1$ より大きくてもよい)

$$S_k(p-1) = 1^k + 2^k + \cdots + (p-1)^k \equiv 0 \pmod{p}$$

証明 p の原始根² の 1 つを a とすると, 原始根のべき乗は既約剰余系をなすから

$$S_k(p-1) \equiv \sum_{j=0}^{p-2} a^{jk} \pmod{p}$$

両辺に $a^k - 1$ を掛けると, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ に注意して

$$(a^k - 1) S_k(p-1) \equiv (a^k - 1) \sum_{j=0}^{p-2} a^{jk} \equiv a^{k(p-1)} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

このとき, $a^k - 1 \not\equiv 0$ であるから $S_k(p-1) \equiv 0 \pmod{p}$ ■

² <http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/saga/saga.2005.pdf> (p.8 を参照)

- 4 (1) 時刻 t における C_1 の中心 $(t, 1)$ を B とすると

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{2} - t) \\ \sin(-\frac{\pi}{2} - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - 2 \sin t \\ 1 - 2 \cos t \end{pmatrix}$$

よって $(x(t), y(t)) = (t - 2 \sin t, 1 - 2 \cos t)$

- (2) (1) の結果から $x'(t) = 1 - 2 \cos t$, $y'(t) = 2 \sin t$

t	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	π	...	$\frac{5}{3}\pi$	...	2π
$x'(t)$		-	0	+	+	+	0	-	
$y'(t)$		+	+	+	0	-	-	-	
$(x'(t), y'(t))$		$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	
$(x(t), y(t))$	(0, -1)	...	$(\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}, 0)$	...	$(\pi, 3)$	...	$(\frac{5}{3}\pi + \sqrt{3}, 0)$	...	$(2\pi, -1)$

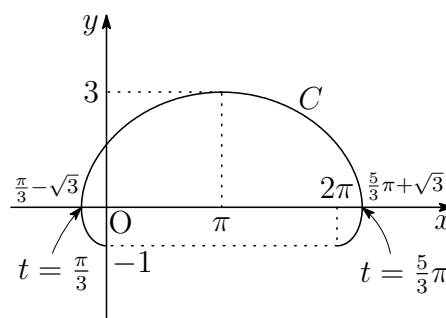
$x(t)$ を最大にする点 A は, $t = \frac{5}{3}\pi$ のとき $\left(\frac{5}{3}\pi + \sqrt{3}, 0\right)$

$x(t)$ を最小にする点 A は, $t = \frac{\pi}{3}$ のとき $\left(\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}, 0\right)$

$y(t)$ を最大にする点 A は, $t = \pi$ のとき $(\pi, 3)$

$y(t)$ を最小にする点 A は, $t = 0, 2\pi$ のとき $(0, -1), (2\pi, -1)$

- (3) (2) の結果から, C は次のようになる.



求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}}^{\frac{5}{3}\pi + \sqrt{3}} y \, dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{3}\pi} (1 - 2 \cos t) \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{3}\pi} (1 - 2 \cos t)^2 dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{3}\pi} \left(1 - 4 \cos t + 4 \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt \\ &= \left[3t - 4 \sin t + \sin 2t \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{3}\pi} = 4\pi + 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

