

平成23年度 名古屋大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・農・医・情報文化(自然情報) 数I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4

1 $-\frac{1}{4} < s < \frac{1}{3}$ とする. xyz 空間内の平面 $z = 0$ の上に長方形

$$R_s = \{(x, y, 0) \mid 1 \leq x \leq 2 + 4s, 1 \leq y \leq 2 - 3s\}$$

がある. 長方形 R_s を x 軸のまわりに1回転してできる立体を K_s とする.

- (1) 立体 K_s の体積 $V(s)$ が最大となるときの s の値, およびそのときの $V(s)$ の値を求めよ.
- (2) s を (1) で求めた値とする. このときの立体 K_s を y 軸のまわりに1回転してできる立体 L の体積を求めよ.

2 $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする. 整数 $n \geq 1$ に対して, 次の試行により行列 A_{n-1} から行列 A_n を定める.

「数字の組 $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$ を1つずつ書いた4枚の札が入っている袋から1枚を取り出し, その札に書かれている数字の組が (i, j) のとき, A_{n-1} の (i, j) 成分に1を加えた行列を A_n とする.」

この試行を n 回 ($n = 2, 3, 4, \dots$) くり返した後に, $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ が逆行列をもたず A_n は逆行列をもつ確率を p_n とする.

- (1) p_2, p_3 を求めよ.
- (2) $(n-1)$ 回 ($n = 2, 3, 4, \dots$) の試行をくり返した後に, A_{n-1} の第1行の成分がいずれも正で第2行の成分はいずれも0である確率 q_{n-1} を求めよ.
- (3) p_n ($n = 2, 3, 4, \dots$) を求めよ.

3 xy 平面上に3点 $O(0, 0), A(1, 0), B(0, 1)$ がある.

- (1) $a > 0$ とする. $OP : AP = 1 : a$ を満たす点 P の軌跡を求めよ.
- (2) $a > 0, b > 0$ とする. $OP : AP : BP = 1 : a : b$ を満たす点 P が存在するための a, b に対する条件を求め, ab 平面上に図示せよ.

4 a, b は $a \geq b > 0$ を満たす整数とし, x と y の2次方程式

$$x^2 + ax + b = 0, \quad y^2 + by + a = 0$$

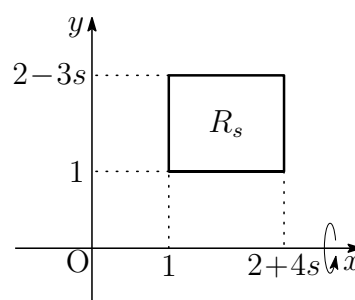
がそれぞれ整数解をもつとする.

- (1) $a = b$ とするとき, 条件を満たす整数 a をすべて求めよ.
- (2) $a > b$ とするとき, 条件を満たす整数の組 (a, b) をすべて求めよ.

解答例

- 1 (1) $V(s)$ は底面の半径が $2-3s$, 高さが $1+4s$ の円柱の体積から底面の半径が 1 , 高さが $1+4s$ の円柱の体積を引いたものであるから

$$\begin{aligned} V(s) &= \pi(2-3s)^2(1+4s) - \pi \cdot 1^2(1+4s) \\ &= 3\pi(4s+1)(3s-1)(s-1) \\ &= 3\pi(12s^3 - 13s^2 + 1) \end{aligned}$$



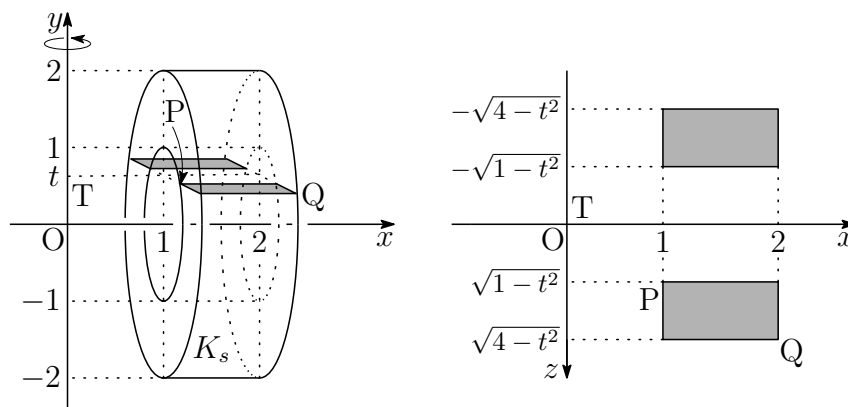
$V(s)$ を微分すると $V'(s) = 3\pi(36s^2 - 26s) = 6\pi s(18s - 13)$

s	$-\frac{1}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$
$V'(s)$		$+$	0	$-$	
$V(s)$	0	$\nearrow$	3π	$\searrow$	0

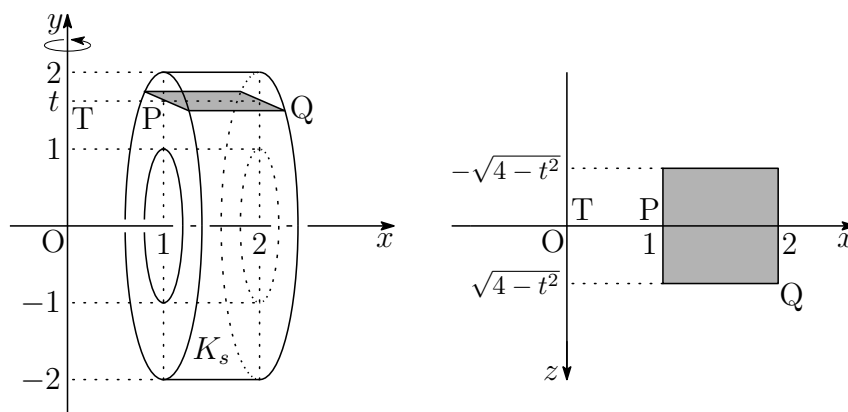
よって $s = 0$ のとき 最大値 3π

- (2) 立体 K_s の平面 $y = t$ による断面で, y 軸上の y 座標が t である点 T からの距離が最短, 最長である点の 1 つをそれぞれ P , Q とする.

(i) $|t| < 1$ のとき $TQ^2 - TP^2 = \{2^2 + (4 - t^2)\} - \{1^2 + (1 - t^2)\} = 6$



(ii) $1 \leq |t| \leq 2$ のとき $TQ^2 - TP^2 = \{2^2 + (4 - t^2)\} - 1^2 = 7 - t^2$



(i),(ii) から $|t| \leq 2$ のとき, $f(t) = \text{TQ}^2 - \text{TP}^2$ とおくと

$$f(t) = \begin{cases} 6 & (|t| < 1) \\ 7 - t^2 & (1 \leq |t| \leq 2) \end{cases}$$

求める立体 L の体積を V とすると, $f(t)$ が偶関数であることに注意して

$$\begin{aligned} \frac{V}{2\pi} &= \int_0^2 f(t) dt = \int_0^1 6 dt + \int_1^2 (7 - t^2) dt \\ &= \left[6t \right]_0^1 + \left[7t - \frac{t^3}{3} \right]_1^2 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

よって $V = \frac{64}{3}\pi$ ■

2 (1) A_0, A_1 が逆行列をもたず A_2 が逆行列をもつとき, A_1, A_2 の推移は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

の 4 通りであるから $p_2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times 4 = \frac{1}{4}$

A_0, A_1, A_2 が逆行列をもたず A_3 が逆行列をもつとき, A_1, A_2, A_3 の推移は

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき, A_2, A_3 の推移は次の 5 通りである.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ または } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ または } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A_1 が $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のときも同様に, A_2, A_3 の推移はそれぞれ 5 通りである.

よって $p_3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times 5 \times 4 = \frac{5}{16}$

- (2) $n-1$ 回の試行後に ($n=2, 3, 4, \dots$), 第2行の成分がいずれも0である確率は

$$\left(\frac{2}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$n-1$ 回の試行後に ($n=2, 3, 4, \dots$), (1, 1) 成分が $n-1$, (1, 2) 成分が $n-1$ となる確率はともに

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{4^{n-1}}$$

よって
$$q_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{4^{n-1}} \times 2 = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2}{4^{n-1}}$$

- (3) (2) と同様に次の (a)~(c) の事象の確率もそれぞれ q_{n-1} である ($n=2, 3, 4, \dots$).

(a) A_{n-1} の第2行の成分がいずれも正で第1行の成分が0

(b) A_{n-1} の第1列の成分がいずれも正で第2列の成分が0

(c) A_{n-1} の第2列の成分がいずれも正で第1列の成分が0

(2) および (a)~(c) のとき, A_n が逆行列をもつ確率は

$$q_{n-1} \times \frac{1}{2} \times 4 = 2q_{n-1} \quad \dots \textcircled{1}$$

A_{n-1} の1つの成分だけが正で A_n が逆行列をもつ確率は ($n=2, 3, 4, \dots$)

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \times \frac{1}{4} \times 4 = \frac{1}{4^{n-1}} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② から
$$\begin{aligned} p_n &= 2q_{n-1} + \frac{1}{4^{n-1}} \\ &= 2\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2}{4^{n-1}}\right) + \frac{1}{4^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{3}{4^{n-1}} \end{aligned}$$



- 3** (1) 点 P の座標を (x, y) とすると

$$OP^2 = x^2 + y^2, \quad AP^2 = (x-1)^2 + y^2$$

OP : AP = 1 : a より, $AP^2 = a^2 OP^2$ であるから

$$(x-1)^2 + y^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

整理すると $(1-a^2)x^2 + (1-a^2)y^2 - 2x + 1 = 0$

よって $a = 1$ のとき 直線 $x = \frac{1}{2}$

$$a \neq 1 \text{ のとき } \quad \text{円} \quad \left(x - \frac{1}{1-a^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{1-a^2}\right)^2$$

- (2) (1) と同様に, OP : BP = 1 : b を満たす点 P の軌跡は

$$b = 1 \text{ のとき } \quad \text{直線 } y = \frac{1}{2}$$

$$b \neq 1 \text{ のとき } \quad \text{円 } x^2 + \left(y - \frac{1}{1-b^2}\right)^2 = \left(\frac{b}{1-b^2}\right)^2$$

ここで, (1) で求めた円を C_1 , 上の円を C_2 とする.

(i) $a = b = 1$ のとき, 2 直線 $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ は共有点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ をもつ.

(ii) $a = 1$, $b \neq 1$ のとき, C_2 の中心 $\left(0, \frac{1}{1-b^2}\right)$ から直線 $x = \frac{1}{2}$ までの距離と円の半径 $\frac{b}{|1-b^2|}$ の大小関係により

$$\frac{1}{2} \leq \frac{b}{|1-b^2|} \quad \text{ゆえに} \quad -2b \leq b^2 - 1 \leq 2b$$

これを解いて $-1 + \sqrt{2} \leq b \leq 1 + \sqrt{2}$

(iii) $a \neq 1$, $b = 1$ のとき, (ii) と同様にして $-1 + \sqrt{2} \leq a \leq 1 + \sqrt{2}$

(iv) $a \neq 1$, $b \neq 1$ のとき, C_1 , C_2 の半径をそれぞれ r_1 , r_2 とし, 中心間の距離を d とすると

$$|r_1 - r_2| \leq d \leq r_1 + r_2 \quad \text{ゆえに} \quad |r_1 - r_2|^2 \leq d^2 \leq (r_1 + r_2)^2$$

整理すると $-2r_1r_2 \leq d^2 - r_1^2 - r_2^2 \leq 2r_1r_2$

すなわち $|d^2 - r_1^2 - r_2^2| \leq 2r_1r_2 \quad \cdots (*)$

このとき

$$\begin{aligned}
 d^2 - r_1^2 - r_2^2 &= \left(\frac{1}{1-a^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{1-b^2} \right)^2 - \left(\frac{a}{1-a^2} \right)^2 - \left(\frac{b}{1-b^2} \right)^2 \\
 &= \frac{1-a^2}{(1-a^2)^2} + \frac{1-b^2}{(1-b^2)^2} = \frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2}, \\
 r_1 r_2 &= \frac{a}{|1-a^2|} \cdot \frac{b}{|1-b^2|} = \frac{ab}{|(1-a^2)(1-b^2)|}
 \end{aligned}$$

これらを(*)に代入すると

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} \right| &\leq \frac{2ab}{|(1-a^2)(1-b^2)|} \\
 |a^2 + b^2 - 2| &\leq 2ab \\
 -2ab &\leq a^2 + b^2 - 2 \leq 2ab
 \end{aligned}$$

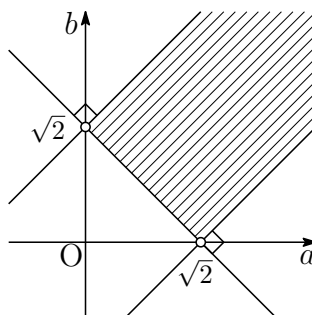
$$\text{ゆえに} \quad (a+b)^2 \geq 2 \quad \text{かつ} \quad (a-b)^2 \leq 2$$

$$\text{よって} \quad a > 0, \quad b > 0, \quad a+b \geq \sqrt{2}, \quad |a-b| \leq \sqrt{2} \quad \cdots (**)$$

(i)~(iii) の場合は(**)に含まれることに注意すると、点Pが存在するための a, b の条件は

$$a > 0, \quad b > 0, \quad a+b \geq \sqrt{2}, \quad |a-b| \leq \sqrt{2}$$

したがって、 ab 平面上の不等式の表す領域は下の図の斜線部分で、 $\circ$ 以外の境界線を含む。



- 4 (1) 2次方程式 $x^2 + ax + a = 0$ の解を α, β とすると、解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -a, \quad \alpha\beta = a \quad \cdots (*)$$

上の2式から a を消去すると

$$\alpha\beta + \alpha + \beta = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (\alpha + 1)(\beta + 1) = 1$$

$\alpha + 1, \beta + 1$ は整数であるから

$$\alpha + 1 = \beta + 1 = \pm 1 \quad \text{これを解いて} \quad (\alpha, \beta) = (0, 0), (-2, -2)$$

$a > 0$ および $(*)$ より、 $\alpha\beta \neq 0$ であるから

$$\alpha = \beta = -2 \quad \text{よって} \quad a = 4$$

- (2) 2次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の整数解を x_1, x_2 とすると ($x_1 \leq x_2$)、解と係数の関係により

$$x_1 + x_2 = -a, \quad x_1x_2 = b \quad \cdots (*)$$

$a > 0, b > 0$ であるから $x_1 \leq x_2 \leq -1 \quad \cdots \textcircled{1}$

$a > b$ より、 $b - a \leq -1$ であるから

$$x_1x_2 + x_1 + x_2 \leq -1 \quad \text{ゆえに} \quad (x_1 + 1)(x_2 + 1) \leq 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② より、 $x_1 = -n, x_2 = -1$ とおける (n は自然数). これを $(*)$ に代入することにより

$$a = n + 1, \quad b = n \quad \cdots (**)$$

したがって、2次方程式 $y^2 + by + a = 0$ 、すなわち、 $y^2 + ny + n + 1 = 0$ の整数解を y_1, y_2 とおくと、解と係数の関係により

$$y_1 + y_2 = -n, \quad y_1y_2 = n + 1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

これから、 $y_1 \leq y_2 \leq -1$ とし、上の2式から n を消去すると

$$y_1y_2 + y_1 + y_2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad (y_1 + 1)(y_2 + 1) = 2$$

したがって $y_1 + 1 = -2, y_2 + 1 = -1$ すなわち $y_1 = -3, y_2 = -2$

これを ③ に代入すると $n = 5$ さらに、 $(**)$ より $a = 6, b = 5$ ■