

平成22年度 名古屋大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・農・医・情報文化(自然情報) 数I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4

1 座標空間内に8点

$$\begin{aligned} &O(0, 0, 0), P(1, 0, 0), Q(1, 1, 0), R(0, 1, 0), \\ &A(0, 0, 1), B(1, 0, 1), C(1, 1, 1), D(0, 1, 1) \end{aligned}$$

をとり、線分BCの中点をMとする．線分RD上の点を $N(0, 1, t)$ とし、3点O, M, Nを通る平面と線分PDおよび線分PBとの交点をそれぞれK, Lとする．

- (1) Kの座標を t で表せ．
- (2) 四面体OKLPの体積を $V(t)$ とする．Nが線分RD上をRからDまで動くとき、 $V(t)$ の最大値と最小値およびそれらを与える t の値をそれぞれ求めよ．

2 関数 $f(x) = (x^2 - x)e^{-x}$ について、次の問いに答えよ．必要ならば、任意の自然数 n に対して

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$$

が成り立つことを用いてよい．

- (1) $y = f(x)$ の変曲点を求め、グラフの概形をかけ．
- (2) $a > 0$ とする．点 $(0, a)$ を通る $y = f(x)$ のグラフの接線が1本だけ存在するような a の値を求めよ．また、 a がその値をとるとき、 $y = f(x)$ のグラフ、その接線および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

3 はじめに、Aが赤玉を1個、Bが白玉を1個、Cが青玉を1個持っている．表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ の硬貨を投げ、表が出ればAとBの玉を交換し、裏が出ればBとCの玉を交換する、という操作を考える．この操作を n 回($n = 1, 2, 3, \dots$)くり返した後にA, B, Cが赤玉を持っている確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とおく．

- (1) $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ を求めよ．
- (2) $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ を a_n, b_n, c_n で表せ．
- (3) a_n, b_n, c_n を求めよ．

4 xy 平面上で x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ．

- (1) $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x$ のグラフ上に無限個の格子点が存在することを示せ．

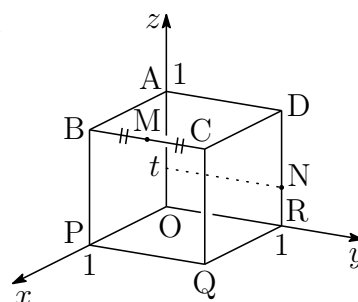
- (2) a, b は実数で $a \neq 0$ とする. $y = ax^2 + bx$ のグラフ上に, 点 $(0, 0)$ 以外に格子点が 2 つ存在すれば, 無限個存在することを示せ.

解答例

- 1 (1) 2点 $B(1, 0, 1)$, $C(1, 1, 1)$ の中点 M の座標は

$$\left(\frac{1+1}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{1+1}{2} \right)$$

すなわち $M\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$



直線 PD 上の点の位置ベクトルは、実数 k を用いて

$$\overrightarrow{OP} + k\overrightarrow{PD}$$

平面 OMN 上の点の位置ベクトルは、実数 α, β を用いて

$$\alpha\overrightarrow{OM} + \beta\overrightarrow{ON}$$

直線 PD と平面 OMN の交点は

$$\overrightarrow{OP} + k\overrightarrow{PD} = \alpha\overrightarrow{OM} + \beta\overrightarrow{ON}$$

$\overrightarrow{OM} = (1, \frac{1}{2}, 1)$, $\overrightarrow{ON} = (0, 1, t)$ の両方に垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{n} = (t-2, -2t, 2)$$

とすると, $\overrightarrow{OP} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{PD} = (-1, 1, 1)$ より

$$\vec{n} \cdot (\overrightarrow{OP} + k\overrightarrow{PD}) = \vec{n} \cdot (\alpha\overrightarrow{OM} + \beta\overrightarrow{ON})$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OP} + k\vec{n} \cdot \overrightarrow{PD} = 0$$

$$t-2 + k(4-3t) = 0$$

N は線分 RD 上の点であるから, $0 \leq t \leq 1$ より, $4-3t \neq 0$ に注意して

$$k = \frac{2-t}{4-3t}$$

したがって, K の位置ベクトルは

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OK} &= \overrightarrow{OP} + \frac{2-t}{4-3t}\overrightarrow{PD} = (1, 0, 0) + \frac{2-t}{4-3t}(-1, 1, 1) \\ &= \left(\frac{2-2t}{4-3t}, \frac{2-t}{4-3t}, \frac{2-t}{4-3t} \right) \end{aligned}$$

よって $K\left(\frac{2-2t}{4-3t}, \frac{2-t}{4-3t}, \frac{2-t}{4-3t}\right)$

(2) 直線 PB 上の点の位置ベクトルは, 実数 l を用いて

$$\overrightarrow{OP} + l\overrightarrow{PB}$$

直線 PB と平面 OMN の交点は

$$\overrightarrow{OP} + l\overrightarrow{PB} = \alpha\overrightarrow{OM} + \beta\overrightarrow{ON}$$

(1) と同様にして, 上式の両辺と $\vec{n}$ との内積をとると

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OP} + l\vec{n} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$$

ゆえに $t - 2 + 2l = 0$ すなわち $l = \frac{2-t}{2}$

したがって, L の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OP} + \frac{2-t}{2}\overrightarrow{PB} = (1, 0, 0) + \frac{2-t}{2}(0, 0, 1) = \left(1, 0, \frac{2-t}{2}\right)$$

直角三角形 OPL は zx 平面上にあるから, $0 \leq t \leq 1$ に注意して

$$\triangle OPL = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2-t}{2} = \frac{1}{4}(2-t)$$

四面体 OKLP の体積 $V(t)$ は, 点 K の y 座標を y_k とすると, $y_k > 0$ に注意して

$$V(t) = \frac{1}{3} \cdot \triangle OPL \cdot y_k = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}(2-t) \cdot \frac{2-t}{4-3t} = \frac{(2-t)^2}{12(4-3t)}$$

$$\text{ゆえに} \quad V'(t) = \frac{2(t-2) \cdot (4-3t) - (2-t)^2 \cdot (-3)}{12(4-3t)^2} = \frac{(t-2)(2-3t)}{12(4-3t)^2}$$

したがって, $V(t)$ の増減表は次のようになる.

t	0	$\dots$	$\frac{2}{3}$	$\dots$	1
$V'(t)$		$-$	0	$+$	
$V(t)$	$\frac{1}{12}$	$\searrow$	$\frac{2}{27}$	$\nearrow$	$\frac{1}{12}$

よって $t = 0, 1$ のとき最大値 $\frac{1}{12}$,

$t = \frac{2}{3}$ のとき最小値 $\frac{2}{27}$

■

2 (1) $f(x) = (x^2 - x)e^{-x}$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x - 1)e^{-x} + (x^2 - x)(-e^{-x}) \\ &= (-x^2 + 3x - 1)e^{-x}, \\ f''(x) &= (-2x + 3)e^{-x} + (-x^2 + 3x - 1)(-e^{-x}) \\ &= (x^2 - 5x + 4)e^{-x} = (x - 1)(x - 4)e^{-x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{ の解は } x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$\alpha = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ とおくと, $f(x)$ の増減表は

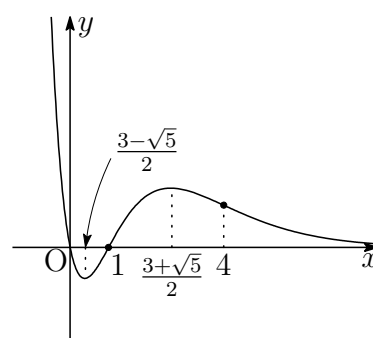
x	...	α	...	1	...	β	...	4	...
$f'(x)$	—	0	+	+	+	0	—	—	—
$f''(x)$	+	+	+	0	—	—	—	0	+
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	変曲点	$\nearrow$	極大	$\searrow$	変曲点	$\searrow$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$f(1) = 0$, $f(4) = 12e^{-4}$ であるから,
 $y = f(x)$ のグラフの変曲点は

$$(1, 0), \quad (4, 12e^{-4})$$

また, $y = f(x)$ のグラフの概形は,
 右の図のようになる.



- (2) 点 $(0, a)$ を通る $y = f(x)$ のグラフの接線の接点を $(t, f(t))$ とすると、接線の方程式は

$$y = (-t^2 + 3t - 1)e^{-t}(x - t) + (t^2 - t)e^{-t} \quad \cdots \textcircled{1}$$

これが点 $(0, a)$ を通るから $a = (t^3 - 2t^2)e^{-t} \quad \cdots (*)$

このとき, $(*)$ を満たす t がただ 1 つ存在する a の値を求めればよい.

$$g(t) = (t^3 - 2t^2)e^{-t} \text{ とおくと } g'(t) = -t(t-1)(t-4)e^{-t}$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$32e^{-4}$	$\searrow$

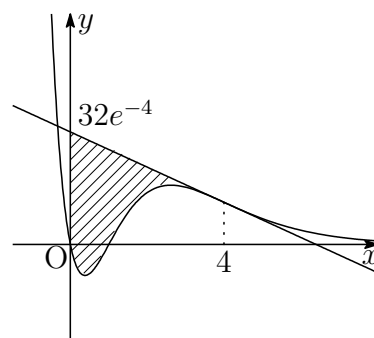
$$\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$$

したがって, $g(t) = a$ を満たす t がただ 1 つ存在するときの t および a の値は

$$t = 4, \quad a = 32e^{-4}$$

このとき, その接線の方程式は

$$y = -5e^{-4}x + 32e^{-4}$$



求める面積は右の図の斜線部分であるから, その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 \{-5e^{-4}x + 32e^{-4} - (x^2 - x)e^{-x}\} dx \\ &= \left[-\frac{5}{2}e^{-4}x^2 + 32e^{-4}x + (x^2 + x + 1)e^{-x} \right]_0^4 \\ &= 109e^{-4} - 1 \end{aligned}$$

補足 次の積分公式を利用するとよい¹.

$$\int e^{-x} f(x) dx = -e^{-x} \{f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \cdots\} + C$$

■

¹ http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_math_2015_kouki.pdf (p.7 を参照)

- 3** (1) 硬貨を1回投げ、Aが赤玉を持つのは裏が出る確率であるから

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

硬貨を1回投げ、Bが赤玉を持つのは表が出る確率であるから

$$b_1 = \frac{1}{2}$$

硬貨を1回投げ、Cが赤玉を持つことはないから、その確率は

$$c_1 = 0$$

次の確率漸化式が成立する.

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} \text{表のとき} \\ \begin{array}{ccc} n & & n+1 \\ A & \searrow & A \\ B & \nearrow & B \\ C & \longrightarrow & C \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{裏のとき} \\ \begin{array}{ccc} n & & n+1 \\ A & \longrightarrow & A \\ B & \searrow & B \\ C & \nearrow & C \end{array} \end{array}$$

$a_1 = b_1 = \frac{1}{2}$, $c_1 = 0$ であるから (*) により

$$a_2 = \frac{1}{2}, \quad b_2 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = \frac{1}{4}$$

(2) (*) より

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n, \quad c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$$

(3) $a_n + b_n + c_n = 1$ であるから, (*) の第2式より

$$b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \left(b_n - \frac{1}{3} \right)$$

$$\text{したがって} \quad b_n - \frac{1}{3} = \left(b_1 - \frac{1}{3} \right) \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$\text{よって} \quad b_n = \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\}$$

(*) の第 1 式から第 2 式の辺々を引くと

$$a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - c_n) \quad \text{ゆえに} \quad a_n - c_n = (a_1 - c_1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{したがって} \quad a_n - c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \cdots \textcircled{1}$$

また, $a_n + c_n = 1 - b_n$ であるから

$$a_n + c_n = 1 - \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } a_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$

$$c_n = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

■

4 (1) 整数 k に対して, $x = 6k$ とおくと

$$y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{3}(6k)^2 + \frac{1}{2} \cdot 6k = 3k(4k + 1)$$

よって, $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x$ のグラフ上に格子点

$$(6k, 3k(4k + 1))$$

が無数に存在する.

(2) $y = ax^2 + bx$ のグラフ上に格子点 (m, M) , (n, N) が存在するとき ($m \neq n$)

$$am^2 + bm = M, \quad an^2 + bn = N$$

$$\text{したがって} \quad a = \frac{nM - mN}{mn(m - n)}, \quad b = \frac{-n^2M + m^2N}{mn(m - n)}$$

$L = mn(m - n)$, $A = nM - mN$, $B = -n^2M + m^2N$ とおくと

$$a = \frac{A}{L}, \quad b = \frac{B}{L} \quad (L, A, B \text{ は整数})$$

整数 j に対して, $x = Lj$ とおくと

$$y = ax^2 + bx = \frac{A}{L}(Lj)^2 + \frac{B}{L} \cdot Lj = j(ALj + B)$$

よって, $y = ax^2 + bx$ 上に格子点

$$(Lj, j(ALj + B))$$

が無数に存在する.

■