

平成21年度 名古屋大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・農・医・情報文化(自然情報) 数I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 必答, 4 5 から1題選択

- 1 $a > 0, b > 0$ とする. 点 $A(0, a)$ を中心とする半径 r の円が, 双曲線 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ と2点 $B(s, t), C(-s, t)$ で接しているとする. ただし, $s > 0$ とする. ここで, 双曲線と円が点 P で接するとは, P が双曲線と円の共有点であり, かつ点 P における双曲線の接線と点 P における円の接線が一致することである.

- (1) r, s, t を a と b を用いて表せ.
(2) $\triangle ABC$ が正三角形となる a と r が存在するような b の値の範囲を求めよ.

- 2 関数 $f(x)$ と $g(\theta)$ を

$$f(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-t^2} dt \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$g(\theta) = f(\cos \theta) - f(\sin \theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

で定める.

- (1) 導関数 $g'(\theta)$ を求めよ.
(2) $g(\theta)$ を求めよ.
(3) $y = g(\theta)$ のグラフをかけ.

- 3 行列 $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ に対して, 座標空間の点 P_n の座標 (a_n, b_n, c_n) ($n = 1, 2, 3, \dots$) を,

$$(a_1, b_1, c_1) = (1, 0, 0),$$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad c_{n+1} = c_n + \sqrt{a_n b_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める.

- (1) A^3 を求めよ.
(2) 点 P_2, P_3, P_4 の座標を求めよ.
(3) 点 P_n の座標を求めよ.

4 さいころを投げると、1から6までの整数の目が等しい確率で出るとする。さいころを n 回 ($n = 1, 2, 3, \dots$) 投げるとき、出る目の積の一の位が j ($j = 0, 1, 2, \dots, 9$) となる確率を $p_n(j)$ とする。

- (1) $p_2(0)$, $p_2(1)$, $p_2(2)$ を求めよ。
- (2) $p_{n+1}(1)$ を, $p_n(1)$ と $p_n(7)$ を用いて表せ。
- (3) $p_n(1) + p_n(3) + p_n(7) + p_n(9)$ を求めよ。
- (4) $p_n(5)$ を求めよ。

5 x , y を正の整数とする。

- (1) $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$ をみたす組 (x, y) をすべて求めよ。
- (2) p を3以上の素数とする。 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$ をみたす組 (x, y) のうち, $2x + 3y$ を最小にする (x, y) を求めよ。

解答例

- 1 (1) 双曲線 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $B(s, t)$ における接線の方程式は

$$sx - \frac{ty}{b^2} = 1$$

この直線の法線ベクトルを $\vec{n}$ とすると

$$\vec{n} = \left(s, -\frac{t}{b^2}\right) // \overrightarrow{AB} = (s, t-a) \text{ より}$$

$$s(t-a) - \left(-\frac{t}{b^2}\right)s = 0 \quad \text{このとき } s \neq 0 \text{ より } t = \frac{ab^2}{b^2+1}$$

$$B(s, t) \text{ は双曲線 } x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 上の点であるから } s^2 - \frac{t^2}{b^2} = 1$$

$$\text{ゆえに } s^2 = \frac{t^2}{b^2} + 1 = \frac{1}{b^2} \left(\frac{ab^2}{b^2+1}\right)^2 + 1 = \frac{a^2b^2}{(b^2+1)^2} + 1$$

$$s > 0 \text{ であるから } s = \sqrt{\frac{a^2b^2}{(b^2+1)^2} + 1}$$

$$t-a = \frac{ab^2}{b^2+1} - a = -\frac{a}{b^2+1} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} r^2 &= |\overrightarrow{AB}|^2 = s^2 + (t-a)^2 \\ &= \frac{a^2b^2}{(b^2+1)^2} + 1 + \left(-\frac{a}{b^2+1}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2+1} + 1 \end{aligned}$$

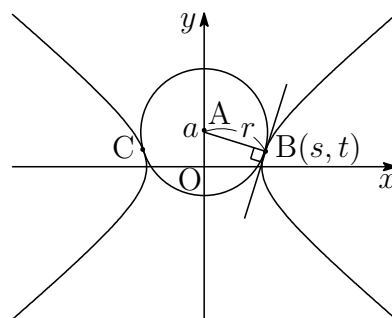
$$\text{よって } r = \sqrt{\frac{a^2}{b^2+1} + 1}$$

- (2) $\triangle ABC$ が正三角形であるとき, $2s = r$ より, $4s^2 = r^2$ であるから

$$\frac{4a^2b^2}{(b^2+1)^2} + 4 = \frac{a^2}{b^2+1} + 1 \quad \text{ゆえに } (1-3b^2)a^2 = 3(1+b^2)^2$$

上の第2式を満たす a が存在するとき

$$1-3b^2 > 0 \quad \text{このとき, } b > 0 \text{ に注意して } 0 < b < \frac{1}{\sqrt{3}}$$



2 (1) $f(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-t^2} dt \quad (-1 \leq x \leq 1)$ より $f'(x) = \sqrt{1-x^2}$

$g(\theta) = f(\cos \theta) - f(\sin \theta)$ であるから

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= -f'(\cos \theta) \sin \theta - f'(\sin \theta) \cos \theta \\ &= -|\sin \theta| \sin \theta - |\cos \theta| \cos \theta \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から $g'(\theta) = \begin{cases} -1 & (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}) \\ \cos 2\theta & (\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi) \\ 1 & (\pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi) \\ -\cos 2\theta & (\frac{3}{2}\pi \leq \theta \leq 2\pi) \end{cases}$

$$\begin{aligned} g(0) &= f(1) - f(0) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt - \int_{-1}^0 \sqrt{1-t^2} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(i) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \int_0^\theta (-1) du + g(0) \\ &= \left[-u \right]_0^\theta + \frac{\pi}{4} = -\theta + \frac{\pi}{4}, \\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(ii) $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ のとき

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^\theta \cos 2u du + g\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \left[\frac{1}{2} \sin 2u \right]_{\frac{\pi}{2}}^\theta - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \sin 2\theta - \frac{\pi}{4}, \\ g(\pi) &= -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(iii) $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \int_\pi^\theta du + g(\pi) \\ &= (\theta - \pi) - \frac{\pi}{4} = \theta - \frac{5\pi}{4}, \\ g\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= \frac{3\pi}{2} - \frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

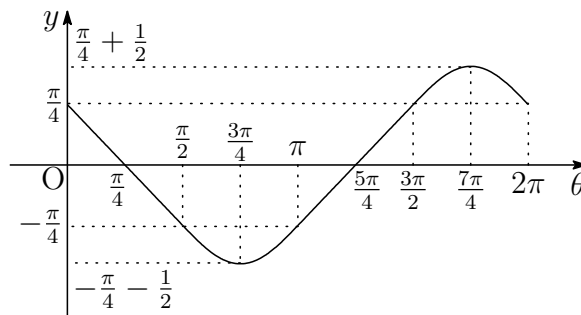
(iv) $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$ のとき

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\theta} (-\cos 2u) du + g\left(\frac{3\pi}{2}\right) \\ &= \left[-\frac{1}{2} \sin 2u \right]_{\frac{3\pi}{2}}^{\theta} + \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(i)~(iv) から

$$g(\theta) = \begin{cases} -\theta + \frac{\pi}{4} & \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{1}{2} \sin 2\theta - \frac{\pi}{4} & \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi\right) \\ \theta - \frac{5\pi}{4} & \left(\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}\right) \\ -\frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{\pi}{4} & \left(\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi\right) \end{cases}$$

(3) (2) の結果から, $y = g(\theta)$ のグラフは次のようになる.



■

3 (1) $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ より, $B = 2A$ において, ハミルトン・ケリーの定理を B に適用すると

$$B^2 + B + E = O \text{ ゆえに } B^3 - E = (B - E)(B^2 + B + E) = O$$

$$\text{したがって } B^3 = (2A)^3 = E \text{ よって } A^3 = \frac{1}{8} E$$

(2) 与えられた漸化式および (1) の結果に注意して

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_4 \\ b_4 \end{pmatrix} &= A^3 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} E \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$c_1 = 0, \quad a_1 b_1 = 0, \quad a_2 b_2 = 0, \quad a_3 b_3 = \frac{1}{16} \text{ より}$$

$$c_2 = c_1 + \sqrt{a_1 b_1} = 0$$

$$c_3 = c_2 + \sqrt{a_2 b_2} = 0$$

$$c_4 = c_3 + \sqrt{a_3 b_3} = \frac{1}{4}$$

$$\text{よって } \mathbf{P}_2 \left(0, \frac{1}{2}, 0 \right), \mathbf{P}_3 \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 0 \right), \mathbf{P}_4 \left(\frac{1}{8}, 0, \frac{1}{4} \right)$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix},$$

$n = 3k + j$ ($j = 0, 1, 2$) とすると

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= (A^3)^k A^j \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8^k} \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n-j}} \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 2^{j-1} a_j \\ 2^{j-1} b_j \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } n \equiv 0 \pmod{3} \text{ のとき } \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = 2^{1-n} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$n \equiv 1 \pmod{3} \text{ のとき } \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = 2^{1-n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$n \equiv 2 \pmod{3} \text{ のとき } \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = 2^{1-n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{a_n b_n} = \begin{cases} 2^{1-n} & (n \equiv 0 \pmod{3}) \\ 0 & (n \not\equiv 0 \pmod{3}) \end{cases}$$

$m = 3 \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil$ とすると

$$\begin{aligned}
 c_n &= \sqrt{a_3 b_3} + \sqrt{a_6 b_6} + \cdots + \sqrt{a_m b_m} \\
 &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} \\
 &= \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2^{m-1}}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{2}{7} \left(1 - \frac{1}{2^m} \right) = \frac{2}{7} \left(1 - 2^{-3 \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil} \right) \\
 &= \begin{cases} \frac{2}{7}(1 - 2^{3-n}) & (n \equiv 0 \pmod{3}) \\ \frac{2}{7}(1 - 2^{1-n}) & (n \equiv 1 \pmod{3}) \\ \frac{2}{7}(1 - 2^{2-n}) & (n \equiv 2 \pmod{3}) \end{cases}
 \end{aligned}$$

よって

$$n \equiv 0 \pmod{3} \text{ のとき } P_n \left(-2^{1-n}, -2^{1-n}, \frac{2}{7}(1 - 2^{3-n}) \right)$$

$$n \equiv 1 \pmod{3} \text{ のとき } P_n \left(2^{1-n}, 0, \frac{2}{7}(1 - 2^{1-n}) \right)$$

$$n \equiv 2 \pmod{3} \text{ のとき } P_n \left(0, 2^{1-n}, \frac{2}{7}(1 - 2^{2-n}) \right)$$

補足 初項 a , 公比 r , 末項 l の等比数列の和 S は $S = \frac{rl - a}{r - 1} = \frac{a - rl}{1 - r}$

(証明) 末項 l が第 n 項とすると, $l = ar^{n-1}$ であるから

$$S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{r \cdot ar^{n-1} - a}{r - 1} = \frac{rl - a}{r - 1} = \frac{a - rl}{1 - r}$$

■

- 4** (1) 1 回目と 2 回目に出た目の積の一の位の数は
右の表のようになるから

$$\begin{aligned}
 p_2(0) &= \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6} \\
 p_2(1) &= \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36} \\
 p_2(2) &= \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	0	2
3	3	6	9	2	5	8
4	4	8	2	6	0	4
5	5	0	5	0	5	0
6	6	2	8	4	0	6

- (2) サイコロを n 回まで投げた目の積の一の位と $n+1$ 回目のサイコロの目の積の一の位は次の表のようになる.

	n 回目までの目の積の一の位									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4

よって
$$p_{n+1}(1) = \frac{1}{6}p_n(1) + \frac{1}{6}p_n(7)$$

- (3) (2) と同様にして

$$p_{n+1}(3) = \frac{1}{6}p_n(1) + \frac{1}{6}p_n(3)$$

$$p_{n+1}(7) = \frac{1}{6}p_n(7) + \frac{1}{6}p_n(9)$$

$$p_{n+1}(9) = \frac{1}{6}p_n(3) + \frac{1}{6}p_n(9)$$

(2) の結果と上の 3 式の辺々を加えると

$$p_{n+1}(1) + p_{n+1}(3) + p_{n+1}(7) + p_{n+1}(9) = \frac{1}{3}(p_n(1) + p_n(3) + p_n(7) + p_n(9))$$

ここで, $p_1(1) + p_1(3) + p_1(7) + p_1(9) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 0 + 0 = \frac{1}{3}$ であるから

$$p_n(1) + p_n(3) + p_n(7) + p_n(9) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} = \frac{1}{3^n}$$

- (4) n 回投げたとき, 出る目の積の一の位が奇数, すなわち,

$$p_n(1) + p_n(3) + p_n(5) + p_n(7) + p_n(9) = \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{1}{2^n}$$

であるから, 上式および (3) の結果から

$$p_n(5) = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}$$



5 (1) $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$ より $8y + 4x = xy$ ゆえに $(x-8)(y-4) = 32$

x, y は正の整数であるから, $x-8 \geq -7, y-4 \geq -3$ に注意して

$x-8$	1	2	4	8	16	32
$y-4$	32	16	8	4	2	1

したがって

$$(x, y) = (9, 36), (10, 20), (12, 12), (16, 8), (24, 6), (40, 5)$$

(2) $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$ より $2py + px = xy$ ゆえに $(x-2p)(y-p) = 2p^2$

x, y は正の整数であるから, $x-2p \geq 1-2p, y-p \geq 1-p$ に注意して

$x-2p$	1	2	p	$2p$	p^2	$2p^2$
$y-p$	$2p^2$	p^2	$2p$	p	2	1

したがって

x	$2p+1$	$2p+2$	$3p$	$4p$	p^2+2p	$2p^2+2p$
y	$2p^2+p$	p^2+p	$3p$	$2p$	$p+2$	$p+1$

それぞれの x, y について

$$2x+3y = 6p^2+7p+2, 3p^2+7p+4, 15p, 14p, \\ 2p^2+7p+6, 4p^2+7p+3$$

$p \geq 3$ に注意すると

$$(3p^2+7p+4) - 14p = 3p^2 - 7p + 4 = (p-1)(3p-4) > 0$$

よって, $2x+3y$ を最小にする (x, y) は $(4p, 2p)$ ■