

平成 18 年度 名古屋大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 150 分
理・工・農・医・情報文化 (自然情報) 数 I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4

1 xy 平面上に曲線 $C: y = \log x$ ($x > 0$) を考える.

- (1) 曲線 C の接線で点 $(0, b)$ を通るものの方程式を求めよ.
- (2) 平面上に 2 組の点列 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ を次のように定める. A_1 を $(1, 0)$ とする. A_n が定まったとき, A_n を通り x 軸に平行な直線と y 軸との交点を B_n とし, B_n を通る曲線 C の接線の接点を A_{n+1} とする. このとき, 2 つの線分 $A_n B_n$ と $B_n A_{n+1}$ および曲線 C とで囲まれる部分の面積 S_n を求めよ.
- (3) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{S_n}$ の和を求めよ. ここで, $|r| < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$ であることを用いてよい.

2 s を実数とする. $(u_1, v_1) = (s, 1)$ とし, (u_n, v_n) ($n \geq 2$) を次の漸化式で定める.

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

s が実数全体を動くとき, (u_n, v_n) が描く xy 平面上の図形を ℓ_n とする.

- (1) 図形 ℓ_n ($n \geq 1$) の方程式を求めよ.
- (2) ℓ_{2k-1} (k は正の整数) と y 軸との交点を中心とし, ℓ_{2k} に接する円の方程式を求めよ.

3 座標平面上に 3 点 $O(0, 0)$, $A(4, 2)$, $B(6, 0)$ を考える. 平面上の直線 ℓ に関して点 A と対称な点が線分 OB 上にあるとき, 直線 ℓ をピッタリ直線と呼ぶことにする.

- (1) 点 $P(p, q)$ を通るピッタリ直線 ℓ があるとし, ℓ に関して A と対称な点を $A'(t, 0)$ ($0 \leq t \leq 6$) とするとき, p, q, t の間に成り立つ関係式を求めよ.
- (2) ピッタリ直線が 2 本通る点 $P(p, q)$ の存在範囲を求め, それを図示せよ. 図には三角形 OAB も書いておくこと.
- (3) 点 $P(p, q)$ を通る 2 本のピッタリ直線が直交するような点 $P(p, q)$ の存在範囲を求め, それを図示せよ.

- 4 正六面体の各面に1つずつ、サイコロのように、1から6までの整数がもれなく書かれていて、向かい合う面の数の和は7である．このような正六面体が底面の数字が1であるように机の上におかれている．この状態から始めて、次の試行を繰り返し行う．「現在の底面と隣り合う4面のうちの1つを新しい底面にする．」ただし、これらの4面の数字が a_1, a_2, a_3, a_4 のとき、それぞれの面が新しい底面となる確率の比は $a_1 : a_2 : a_3 : a_4$ とする．この試行を n 回繰り返した後、底面の数字が m である確率を $p_n(m)$ ($n \geq 1$) で表す．

(1) $n \geq 1$ のとき、 $q_n = p_n(1) + p_n(6)$, $r_n = p_n(2) + p_n(5)$, $s_n = p_n(3) + p_n(4)$ を求めよ．

(2) $p_n(m)$ ($n \geq 1, m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) を求めよ．

解答例

- 1 (1) $C: y = \log x$ より $y' = \frac{1}{x}$
 C 上の点 $(t, \log t)$ における接線の方程式は

$$y - \log t = \frac{1}{t}(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{x}{t} - 1 + \log t$$

これが点 $(0, b)$ を通るとき $-1 + \log t = b$ ゆえに $t = e^{b+1} \dots (*)$

よって、求める直線の方程式は $y = \frac{x}{e^{b+1}} + b$

- (2) 点 A_n の x 座標を a_n , 点 B_n の y 座標を b_n とすると

$$b_n = \log a_n \quad \dots \textcircled{1}$$

① より、点 A_{n+1} における接線の y 切片が b_n であるから

$$a_{n+1} = e^{b_n+1} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より $a_{n+1} = ee^{b_n} = ea_n$

$a_1 = 1$ であるから, a_n は初項 1, 公比 e の等比数列であるから $a_n = e^{n-1}$

これを ① に代入して $b_n = n - 1$

S_n は, 右の図の斜線部分の面積であるから

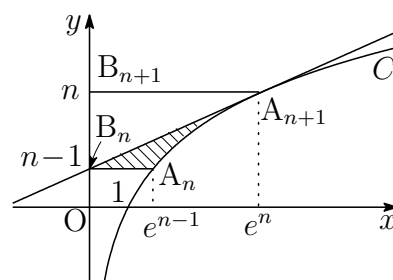
$$S_n = \int_{n-1}^n e^y dy - \triangle B_n B_{n+1} A_{n+1} = \left[e^y \right]_{n-1}^n - \frac{1}{2} e^n = \frac{e^{n-1}}{2} (e - 2)$$

- (3) (2) の結果から $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{S_n} = \frac{2}{e-2} \sum_{n=1}^{\infty} n(e^{-1})^{n-1}$

ここで, $-1 < t < 1$ について, $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n = \frac{t}{1-t}$ とすると

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n t^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{S_n} &= \frac{2}{e-2} f'(e^{-1}) = \frac{2}{e-2} \cdot \frac{1}{(1-e^{-1})^2} \\ &= \frac{2e^2}{(e-2)(e-1)^2} \end{aligned}$$



2 (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと、ハミルトン・ケリーの定理により

$$A^2 + 3E = 0 \quad \text{ゆえに} \quad A^2 = -3E$$

(i) n が奇数のとき

$$\begin{aligned} A^{n-1} &= (A^2)^{\frac{n-1}{2}} = (-3E)^{\frac{n-1}{2}} = (-3)^{\frac{n-1}{2}} E, \\ \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= A^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = (-3)^{\frac{n-1}{2}} E \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} = (-3)^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \ell_n : y = (-3)^{\frac{n-1}{2}}$$

(ii) n が偶数のとき

$$\begin{aligned} A^{n-1} &= (A^2)^{\frac{n-2}{2}} A = (-3E)^{\frac{n-2}{2}} A = (-3)^{\frac{n-2}{2}} A, \\ \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= A^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = (-3)^{\frac{n-2}{2}} A \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} = (-3)^{\frac{n-2}{2}} \begin{pmatrix} s-2 \\ 2s-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad 2u_n - v_n = (-3)^{\frac{n-2}{2}} \cdot (-3)$$

$$\text{よって} \quad \ell_n : 2x - y - (-3)^{\frac{n}{2}} = 0$$

(2) (1) の結果から

$$\ell_{2k-1} : y = (-3)^{k-1}, \quad \ell_{2k} : 2x - y - (-3)^k = 0$$

直線 ℓ_{2k-1} と y 軸との交点 $(0, (-3)^{k-1})$ と直線 ℓ_{2k} の距離 r は

$$r = \frac{|2 \cdot 0 - (-3)^{k-1} - (-3)^k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{2 \cdot 3^{k-1}}{\sqrt{5}}$$

よって、求める円の方程式は

$$x^2 + \{y - (-3)^{k-1}\}^2 = \frac{4 \cdot 3^{2k-2}}{5}$$

■

- 3 (1) ℓ は 2 点 $A(4, 2)$, $A'(t, 0)$ を結ぶ線分 AA' の垂直二等分線であるから,
 ℓ 上の点を $Q(x, y)$ とすると, $AQ^2 = A'Q^2$ であるから

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = (x-t)^2 + y^2$$

これを整理すると $(8-2t)x + 4y + t^2 - 20 = 0 \quad \cdots (*)$

この直線上に点 $P(p, q)$ があるから $(8-2t)p + 4q + t^2 - 20 = 0$

よって $t^2 - 2pt + 8p + 4q - 20 = 0$

- (2) (1) の結果から, $f(t) = t^2 - 2pt + 8p + 4q - 20 \cdots (**)$ とおくと

$$f(t) = (t-p)^2 - p^2 + 8p + 4q - 20$$

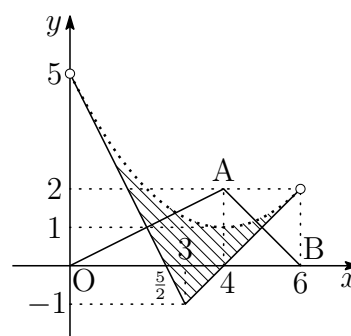
$f(t) = 0$ の異なる 2 つの実数解がともに $0 \leq t \leq 6$ となる条件であるから

$$\begin{cases} -p^2 + 8p + 4q - 20 < 0 \\ 0 \leq p \leq 3 \text{ のとき } f(0) \geq 0 \\ 3 \leq p \leq 6 \text{ のとき } f(6) \geq 0 \end{cases}$$

これらをそれぞれ整理すると

$$\begin{cases} q < \frac{1}{4}(p-4)^2 + 1 \\ 0 \leq p \leq 3 \text{ のとき } q \geq -2p + 5 \\ 3 \leq p \leq 6 \text{ のとき } q \geq p - 4 \end{cases}$$

よって, 点 P の存在範囲は, 右の斜線部分で,
 ○および点線部分は含まない.



- (3) ピッタリ直線が直交するときの 2 つの t の値を α, β とすると, 2 次方程式 $f(t) = 0$ の解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = 2p, \quad \alpha\beta = 8p + 4q - 20 \quad (A)$$

(*) から, それぞれのピッタリ直線の法線ベクトルを

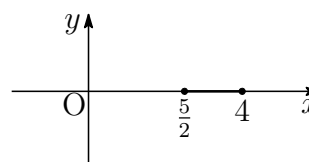
$$\vec{n}_\alpha = (8 - 2\alpha, 4), \quad \vec{n}_\beta = (8 - 2\beta, 4)$$

とすると, $\vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta$ より, $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0$ であるから

$$\alpha\beta - 4(\alpha + \beta) + 20 = 0 \quad \text{これに (A) を代入すると } q = 0$$

(2) で求めた領域から, $q = 0$ のとき

$$\frac{5}{2} \leq p \leq 4$$



よって, 求める領域は, 右の図の両端を含む線分である.



- 4 (1) (i) n 回の試行後, 1 または 6 が底面にあるとき, $n+1$ 回目に 2 または 5 が底面となる確率および 3 または 4 が底面となる確率は, それぞれ

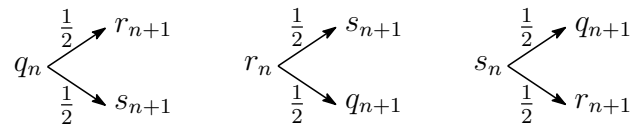
$$\frac{2+5}{2+3+4+5} = \frac{1}{2}, \quad \frac{3+4}{2+3+4+5} = \frac{1}{2}$$

- (ii) n 回の試行後, 2 または 5 が底面にあるとき, $n+1$ 回目に 3 または 4 が底面となる確率および 1 または 6 が底面となる確率は, それぞれ

$$\frac{3+4}{1+3+4+6} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1+6}{1+3+4+6} = \frac{1}{2}$$

- (iii) n 回の試行後, 3 または 4 が底面にあるとき, $n+1$ 回目に 1 または 6 が底面となる確率および 2 または 5 が底面となる確率は, それぞれ

$$\frac{1+6}{1+2+5+6} = \frac{1}{2}, \quad \frac{2+5}{1+2+5+6} = \frac{1}{2}$$



- (i)~(iii) および初期条件から次の確率漸化式が成立する.

$$\begin{aligned} q_1 &= 0, \quad r_1 = s_1 = \frac{1}{2}, \\ q_{n+1} &= \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{2}s_n = \frac{1}{2}(1 - q_n), \\ r_{n+1} &= \frac{1}{2}s_n + \frac{1}{2}q_n = \frac{1}{2}(1 - r_n), \\ s_{n+1} &= \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{2}r_n = \frac{1}{2}(1 - s_n) \end{aligned}$$

これを解くと

$$q_n = \frac{1}{3} \left\{ 1 + 2 \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\}, \quad r_n = s_n = \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\}$$

- (2) 1 または 6 が底面にある事象を Q , 2 または 5 が底面にある事象を R , 3 または 4 が底面にある事象を S とする.

n 回目の試行後に底面の数字が 1, 6 となるは, $n-1$ 回目で R , S のときである. (1) の結果から, それぞれ

$$\begin{aligned} p_n(1) &= \frac{1}{1+3+4+6}r_{n-1} + \frac{1}{1+2+5+6}s_{n-1} = \frac{1}{14}r_{n-1} + \frac{1}{14}s_{n-1} \\ &= \frac{1}{42} \left\{ 2 - 2 \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\} = \frac{1}{21} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\}, \\ p_n(6) &= \frac{6}{1+3+4+6}r_{n-1} + \frac{6}{1+2+5+6}s_{n-1} = \frac{3}{7}r_{n-1} + \frac{3}{7}s_{n-1} \\ &= \frac{1}{7} \left\{ 2 - 2 \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\} = \frac{2}{7} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\} \end{aligned}$$

n 回目の試行後に底面の数字が 2, 5 となるは, $n-1$ 回目で S , Q のときである. (1) の結果から, それぞれ

$$\begin{aligned} p_n(2) &= \frac{2}{1+2+5+6}s_{n-1} + \frac{2}{2+3+4+5}q_{n-1} = \frac{1}{7}s_{n-1} + \frac{1}{7}q_{n-1} \\ &= \frac{1}{21} \left\{ 2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\} = \frac{2}{21} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\}, \\ p_n(5) &= \frac{5}{1+2+5+6}s_{n-1} + \frac{5}{2+3+4+5}q_{n-1} = \frac{5}{42}s_{n-1} + \frac{5}{42}q_{n-1} \\ &= \frac{5}{42} \left\{ 2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\} = \frac{5}{21} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\} \end{aligned}$$

n 回目の試行後に底面の数字が 3, 4 となるは, $n-1$ 回目で Q , R のときである. (1) の結果から, それぞれ

$$\begin{aligned} p_n(3) &= \frac{3}{2+3+4+5}q_{n-1} + \frac{3}{1+3+4+6}r_{n-1} = \frac{3}{14}q_{n-1} + \frac{3}{14}r_{n-1} \\ &= \frac{1}{14} \left\{ 2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\} = \frac{1}{7} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\}, \\ p_n(4) &= \frac{4}{2+3+4+5}q_{n-1} + \frac{4}{1+3+4+6}r_{n-1} = \frac{2}{7}q_{n-1} + \frac{2}{7}r_{n-1} \\ &= \frac{2}{21} \left\{ 2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\} = \frac{4}{21} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\} \end{aligned}$$

