

平成17年度 名古屋大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・農・医・情報文化(自然情報) 数I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 必答, 4 5 から1題選択

1 放物線 $R: y = -x^2 + 3$ と直線 $\ell: y = 2x$ との交点を A, B とする. 直線 $y = 2x + t$ ($t > 0$) は放物線 R と相異なる2点 $C(t)$, $D(t)$ で交わるものとする.

- (1) 放物線 R と直線 ℓ とで囲まれた図形の面積 T を求めよ.
- (2) 4つの点 A, B, $C(t)$, $D(t)$ を頂点とする台形の面積を $S(t)$ とし,
 $f(t) = \frac{S(t)}{T}$ とおく. $f(t)$ の最大値を求めよ.

2 (1) 複素数 z を未知数とする方程式 $z^5 + 2z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 16z + 32 = 0$ の解をすべて求めよ.

- (2) (1) で求めた解 $z = p + qi$ (p, q は実数) のうち次の条件を満たすものをすべて求めよ.

条件: x を未知数とする3次方程式 $x^3 + \sqrt{3}qx + q^2 - p = 0$ が, 整数の解を少なくとも1つもつ.

3 1辺の長さが1の正四面体 OABC を考え, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする. 動点 P は O から A へ辺 OA 上を秒速1で, 動点 Q は A から B へ辺 AB 上を秒速 $\frac{1}{2}$ で, 動点 R は B から C へ辺 BC 上を秒速1で, 動点 S は C から O へ辺 CO 上を秒速 $\frac{1}{2}$ で, 同時に動き出す.

- (1) 動き出してから t 秒後 ($0 \leq t \leq 1$) のベクトル $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OS}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ および t を用いて表せ.
- (2) 線分 PR と線分 QS が交点 M をもつときの t ($0 \leq t \leq 1$) の値を求め, ベクトル $\overrightarrow{OM}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ.

4 整数に値をとる変数 x の値が、以下の規則で変化する.

- (i) ある時刻で $x = m$ ($m \neq 0$) のとき、1 秒後に $x = m + 1$, $x = m - 1$ である確率はともに $\frac{1}{2}$ である.
- (ii) ある時刻で $x = 0$ のとき、1 秒後に $x = 1$ である確率は q , $x = -1$ である確率は $1 - q$ である ($0 \leq q \leq 1$).

$x = 0$ から始めて、 n 秒後 ($n = 0, 1, 2, \dots$) に $x = m$ である確率を $p_n(m)$ とする.

- (1) $p_3(1) + p_3(-1)$ を求めよ.
- (2) すべての自然数 n に対し次がなりたつことを示せ：どんな整数 m についても $p_n(m) + p_n(-m)$ は q にはよらない.
- (3) $p_n(0)$ を求めよ.

5 (1) 連続関数 $f(x)$ が、すべての実数 x について $f(\pi - x) = f(x)$ をみたすとき、 $\int_0^\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right) f(x) dx = 0$ がなりたつことを証明せよ.

- (2) $\int_0^\pi \frac{x \sin^3 x}{4 - \cos^2 x} dx$ を求めよ.

解答例

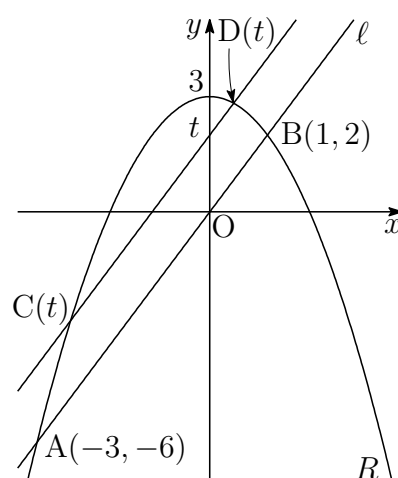
- 1 (1) $y = -x^2 + 3$ と $y = 2x$ から y を消去すると

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

ゆえに $(x + 3)(x - 1) = 0$

これを解いて $x = -3, 1$

$$\begin{aligned} T &= \int_{-3}^1 \{(-x^2 + 3) - 2x\} dx \\ &= - \int_{-3}^1 (x + 3)(x - 1) dx \\ &= \frac{1}{6} \{1 - (-3)\}^3 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$



- (2) 2点 $C(t)$, $D(t)$ の x 座標を α , β とすると, α , β は, 2次方程式

$$-x^2 + 3 = 2x + t \quad \text{すなわち} \quad x^2 + 2x + t - 3 = 0$$

の解であり, これを解くと

$$(*) \quad x = -1 \pm \sqrt{4 - t} \quad \text{ゆえに} \quad |\beta - \alpha| = 2\sqrt{4 - t}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad C(t)D(t) &= |\beta - \alpha|\sqrt{1^2 + 2^2} = |\beta - \alpha|\sqrt{5} \\ &= 2\sqrt{5}\sqrt{4 - t} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\text{また} \quad AB = |1 - (-3)|\sqrt{1^2 + 2^2} = 4\sqrt{5} \quad \dots \textcircled{2}$$

平行な2直線 $2x - y = 0$, $2x - y + t = 0$ の距離を d とすると, d は原点と直線 $2x - y + t = 0$ の距離であるから, $t > 0$ に注意して

$$d = \frac{|t|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{t}{\sqrt{5}} \quad \dots \textcircled{3}$$

①～③ より

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} \left(2\sqrt{5}\sqrt{4 - t} + 4\sqrt{5} \right) \frac{t}{\sqrt{5}} \\ &= (\sqrt{4 - t} + 2)t \end{aligned} \quad (**)$$

(*) は異なる2つの解であるから ($t > 0$) $0 < t < 4$

$u = \sqrt{4-t}$, $g(u) = S(t)$ とおくと $(0 < t < 4)$, $(**)$ は

$$\begin{aligned} g(u) &= (u+2)(4-u^2) & (0 < u < 2) \\ &= -u^3 - 2u^2 + 4u + 8 \\ g'(u) &= -3u^2 - 4u + 4 \\ &= -(u+2)(3u-2) \end{aligned}$$

u	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(2)
$g'(u)$		$+$	0	$-$	
$g(u)$		$\nearrow$	$\frac{256}{27}$	$\searrow$	

したがって $0 < S(t) \leq \frac{256}{27}$ ゆえに $0 < \frac{S(t)}{T} \leq \frac{3}{32} \cdot \frac{256}{27}$

よって, $f(t) = \frac{S(t)}{T}$ の最大値は $\frac{8}{9}$

別解 $g(u) = (2+u)(4-u^2) = (2+u)^2(2-u)$

3 正数 $2+u$, $2+u$, $2(2-u)$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{(2+u) + (2+u) + 2(2-u)}{3} \geq \sqrt[3]{2(2+u)^2(2-u)}$$

したがって $\left(\frac{8}{3}\right)^3 \geq 2(2+u)^2(2-u)$ ゆえに $g(u) \leq \frac{256}{27}$

上式において, 等号が成立するとき

$$2+u = 2(2-u) \quad \text{すなわち} \quad u = \frac{2}{3}$$



2 (1) $z^5 + 2z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 16z + 32 = 0$ より

$$\begin{aligned} z^3(z^2 + 2z + 4) + 8(z^2 + 2z + 4) &= 0 \\ (z^3 + 8)(z^2 + 2z + 4) &= 0 \\ (z + 2)(z^2 - 2z + 4)(z^2 + 2z + 4) &= 0 \end{aligned}$$

よって $z = -2, \pm 1 \pm \sqrt{3}i$ (複号任意)

別解 $z^6 - 2^6 = (z - 2)(z^5 + 2z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 16z + 32)$

$z^6 - 2^6 = 0$ の解は

$$z = 2 \left(\cos \frac{k}{3}\pi + i \sin \frac{k}{3}\pi \right) \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

よって, 方程式 $z^5 + 2z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 16z + 32 = 0$ の解は

$$z = 2 \left(\cos \frac{k}{3}\pi + i \sin \frac{k}{3}\pi \right) \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5)$$

(2) (i) $z = -2$ のとき, $p = -2, q = 0$ より $x^3 + 2 = 0$
これは整数解をもたない.

(ii) $z = 1 + \sqrt{3}i$ のとき, $p = 1, q = \sqrt{3}$ より

$$x^3 + 3x + 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x(x^2 + 3) = -2$$

整数解をもつとすると, $x = \pm 1, \pm 2$ であるが, 上式を満たさない.

(iii) $z = -1 + \sqrt{3}i$ のとき, $p = -1, q = \sqrt{3}$ より

$$x^3 + 3x + 4 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x + 1)(x^2 - x + 4) = 0$$

このとき, 整数解 -1 をもつ.

(iv) $z = -1 - \sqrt{3}i$ のとき, $p = -1, q = -\sqrt{3}$ より

$$x^3 - 3x + 4 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x(x^2 - 3) = -4$$

整数解をもつとすると, $x = \pm 1, \pm 2, \pm 4$ であるが, 上式を満たさない.

(v) $z = 1 - \sqrt{3}i$ のとき, $p = 1, q = -\sqrt{3}$ より

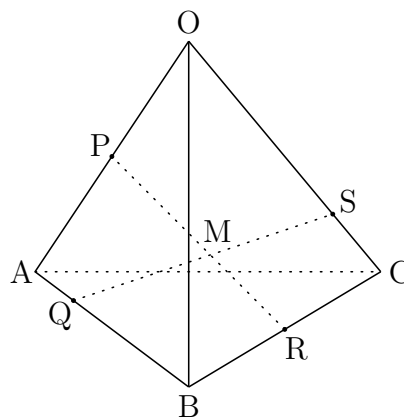
$$x^3 - 3x + 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x - 1)^2(x + 2) = 0$$

このとき, 整数解 $1, -2$ をもつ.

(i)~(v) より, 求める z は $z = -1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i$ ■

3 (1) 条件から

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OP} &= t\vec{a} \\
 \overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OA} + \frac{t}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{t}{2}(\vec{b} - \vec{a}) \\
 &= \left(1 - \frac{t}{2}\right)\vec{a} + \frac{t}{2}\vec{b} \\
 \overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{BC} = \vec{b} + t(\vec{c} - \vec{b}) \\
 &= (1 - t)\vec{b} + t\vec{c} \\
 \overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OC} + \frac{t}{2}\overrightarrow{CO} = \vec{c} + \frac{t}{2}(-\vec{c}) \\
 &= \left(1 - \frac{t}{2}\right)\vec{c}
 \end{aligned}$$



(2) 線分 PR と線分 QS の交点 M は、それぞれ、線分 PR, 線分 QS 上の点であるから、実数 x, y を用いて

$$\overrightarrow{OM} = (1 - x)\overrightarrow{OP} + x\overrightarrow{OR} = y\overrightarrow{OQ} + (1 - y)\overrightarrow{OS} \quad (*)$$

このとき、(1) の結果により

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OM} &= (1 - x)\overrightarrow{OP} + x\overrightarrow{OR} = (1 - x)t\vec{a} + x(1 - t)\vec{b} + xt\vec{c} \quad \cdots \textcircled{1} \\
 \overrightarrow{OM} &= y\overrightarrow{OQ} + (1 - y)\overrightarrow{OS} = y\left(1 - \frac{t}{2}\right)\vec{a} + \frac{yt}{2}\vec{b} + (1 - y)\left(1 - \frac{t}{2}\right)\vec{c}
 \end{aligned}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は 1 次独立であるから、(*) および上の 2 式より

$$(1 - x)t = y\left(1 - \frac{t}{2}\right), \quad x(1 - t) = \frac{yt}{2}, \quad xt = (1 - y)\left(1 - \frac{t}{2}\right) \quad (**)$$

それぞれ、整理すると

$$-xt + \frac{yt}{2} = y - t, \quad xt + \frac{yt}{2} = x, \quad xt - \frac{yt}{2} = 1 - y - \frac{t}{2} \quad (***)$$

(***) の第 1 式と第 2 式から $xt = \frac{1}{2}(x - y + t)$, $yt = x + y - t$

これらを (***) の第 3 式に代入して整理すると $t = \frac{2}{3}$

$t = \frac{2}{3}$ を代入して (**) を解くと $x = y = \frac{1}{2}$

これを ① に代入して $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$ ■

- 4 (1) $p_1(1) = q$, $p_1(-1) = 1 - q$ より

$$\begin{aligned} p_2(2) &= p_1(1) \times \frac{1}{2} = q \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}q \\ p_2(0) &= p_1(1) \times \frac{1}{2} + p_1(-1) \times \frac{1}{2} = q \times \frac{1}{2} + (1 - q) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ p_2(-2) &= p_1(-1) \times \frac{1}{2} = (1 - q) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - q) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} p_3(1) &= p_2(2) \times \frac{1}{2} + p_2(0) \times q \\ &= \frac{1}{2}q \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times q = \frac{3}{4}q \\ p_3(-1) &= p_2(-2) \times \frac{1}{2} + p_2(0) \times (1 - q) \\ &= \frac{1}{2}(1 - q) \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times (1 - q) = \frac{3}{4}(1 - q) \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad p_3(1) + p_3(-1) = \frac{3}{4}q + \frac{3}{4}(1 - q) = \frac{3}{4}$$

- (2) m を正の整数とする. n 秒後に $x = m$ となる過程において最後に $x = 0$ となる時刻を k 秒後とすると, k 秒後から n 秒後に $x = m$ となる確率を P とし, k 秒後から n 秒後に $x = -m$ となる確率を P' とすると, 鏡像原理により, $P = P'$ であるから, k 秒後から n 秒後に $x = m$ または $x = -m$ となる確率は

$$qP + (1 - q)P = P$$

したがって, $p_n(m) + p_n(-m)$ は q にはよらない.

- (3) (2) の結果から, $p_n(0)$ も q によらない確率であるから, $q = \frac{1}{2}$ として求めてもよい.

よって n が奇数のとき $p_n(0) = 0$

$$n \text{ が偶数のとき} \quad p_n(0) = {}_nC_{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{{}_nC_{\frac{n}{2}}}{2^n}$$

補足 鏡像原理は, 九大理系 2002 年 [6]¹ および東大文系 2019 年 [3]² を参照.

■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2002.pdf

²http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_bun_2019.pdf

5 (1) $I = \int_0^\pi x f(x) dx$ とおく. $x = \pi - t$ とすると $\frac{dx}{dt} = -1$

x	$0 \longrightarrow \pi$
t	$\pi \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned} I &= \int_\pi^0 (\pi - t) f(\pi - t) (-dt) \\ &= \int_0^\pi (\pi - t) f(t) dt = \int_0^\pi (\pi - x) f(x) dx \end{aligned}$$

したがって $\int_0^\pi x f(x) dx = \int_0^\pi (\pi - x) f(x) dx$

よって $\int_0^\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right) f(x) dx = 0$

(2) $f(x) = \frac{\sin^3 x}{4 - \cos^2 x}$ とおくと

$$f(\pi - x) = \frac{\sin^3(\pi - x)}{4 - \cos^2(\pi - x)} = \frac{\sin^3 x}{4 - \cos^2 x} = f(x)$$

(1) の結果から $\int_0^\pi x f(x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(x) dx$ (*)

$u = \cos x$ とおくと $\frac{du}{dx} = -\sin x$

x	$0 \longrightarrow \pi$
u	$1 \longrightarrow -1$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) dx &= \int_0^\pi \frac{(1 - \cos^2 x) \sin x}{4 - \cos^2 x} dx = \int_1^{-1} \frac{1 - u^2}{4 - u^2} (-du) \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1 - u^2}{4 - u^2} du = 2 \int_0^1 \frac{1 - u^2}{4 - u^2} du \\ &= 2 \int_0^1 \left\{ 1 - \frac{3}{(2+u)(2-u)} \right\} du \\ &= 2 \left[u - \frac{3}{4} \log \frac{2+u}{2-u} \right]_0^1 = 2 \left(1 - \frac{3}{4} \log 3 \right) \end{aligned} \quad (**)$$

(*), (**) より $\int_0^\pi \frac{x \sin^3 x}{4 - \cos^2 x} dx = \pi \left(1 - \frac{3}{4} \log 3 \right)$ ■