

平成14年度 名古屋大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理・工・農・医・情報文化(自然情報) 数I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 必答, 4 5 から1題選択

1 (1) x を正数とすると、 $\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ と $\frac{1}{x+1}$ の大小を比較せよ.

(2) $\left(1 + \frac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$ と $\left(1 + \frac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}$ の大小を比較せよ.

2 a, b を正数とし, xy 平面で不等式

$$\frac{\{x - (1 - a)\}^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

の表す領域 D と, 不等式 $x^2 + y^2 \leq 1$ の表す領域 E を考える.

(1) $a = 2, b = 1$ の場合に, 領域 D を図示せよ.

(2) D が E に含まれるための a, b の条件を求め, ab 平面上でその条件の表す領域を図示せよ.

3 $f(x)$ を実数全体で定義された連続関数で, $x > 0$ で $0 < f(x) < 1$ を満たすものとする. $a_1 = 1$ とし, 順に,

$$a_m = \int_0^{a_{m-1}} f(x) dx \quad (m = 2, 3, 4, \dots)$$

により数列 $\{a_m\}$ を定める.

(1) $m \geq 2$ に対し, $a_m > 0$ であり, かつ $a_1 > a_2 > \dots > a_{m-1} > a_m > \dots$ となることを示せ.

(2) $\frac{1}{2002} > a_m$ となる m が存在することを背理法を用いて示せ.

4 関係式

$$x^a = y^b = z^c = xyz$$

を満たす 1 とは異なる 3 つの正の実数の組 (x, y, z) が, 少なくとも 1 組存在するような, 正の整数の組 (a, b, c) をすべて求めよ. ただし, $a \leq b \leq c$ とする.

5 次の問いに答えよ. ただし, 偏角 θ は, $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ の範囲で考えるものとする.

- (1) $|z + i| = |z - i|$ を満たす複素数 z は, 実数に限ることを示せ.
- (2) 複素数平面上で z が実軸上を動くとき, 複素数 $z + i$ の偏角 $\arg(z + i)$ の動く範囲を求めよ.
- (3) z を未知数とする方程式 $(z + i)^9 = (z - i)^9$ のすべての解 z について $z + i$ の偏角 $\arg(z + i)$ を求めよ.

解答例

1 (1) $x > 0$ に対して

$$\begin{aligned}\int_x^{x+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{x+1} \right) dt &= \left[\log t - \frac{t}{x+1} \right]_x^{x+1} \\ &= \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} > 0\end{aligned}$$

よって $\log \left(1 + \frac{1}{x} \right) > \frac{1}{x+1}$

(2) $f(x) = \log \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = x \{ \log(x+1) - \log x \}$ とおくと ($x > 0$)

$$\begin{aligned}f'(x) &= \log(x+1) - \log x + x \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \right) \\ &= \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} > 0\end{aligned}$$

$f(x)$ は単調増加関数であるから, $a = \frac{2002}{2001}$ とおくと, $\frac{1}{a} < a$ より

$$f\left(\frac{1}{a}\right) < f(a) \quad \text{ゆえに} \quad \log(1+a)^{\frac{1}{a}} < \log\left(1+\frac{1}{a}\right)^a$$

したがって $(1+a)^{\frac{1}{a}} < \left(1+\frac{1}{a}\right)^a$

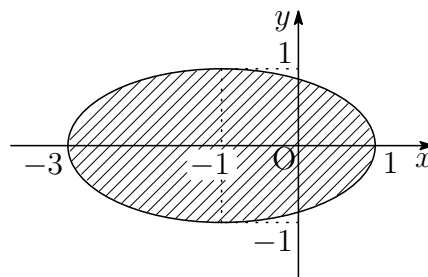
すなわち $\left(1+\frac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}} < \left(1+\frac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$



2 (1) $a = 2, b = 1$ のとき

$$D: \frac{(x+1)^2}{4} + y^2 \leq 1$$

D の表す領域は、右の図の斜線部分で境界線を含む。



(2) 領域 $D: \frac{\{x - (1-a)\}^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$

の境界線の方程式を θ を媒介変数として

$$\begin{cases} x = 1 - a + a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

と表せる．これがつねに $E: x^2 + y^2 \leq 1$ を満たすから

$$(1 - a + a \cos \theta)^2 + (b \sin \theta)^2 \leq 1$$

$t = \cos \theta$ とおくと, $-1 \leq t \leq 1$ より

$$\begin{aligned} \{1 + a(t-1)\}^2 + b^2(1-t^2) - 1 &\leq 0 \\ 2a(t-1) + a^2(t-1)^2 - b^2(t+1)(t-1) &\leq 0 \\ (t-1)\{(a^2 - b^2)t - a^2 - b^2 + 2a\} &\leq 0 \end{aligned}$$

$f(t) = (a^2 - b^2)t - a^2 - b^2 + 2a$ とおくと, 上式は $t = 1$ のときは成立するから, $-1 \leq t < 1$ のとき, $f(t) \geq 0$ を満たせばよい. $f(t)$ のグラフは直線であるから

$$f(-1) \geq 0, \quad f(1) \geq 0$$

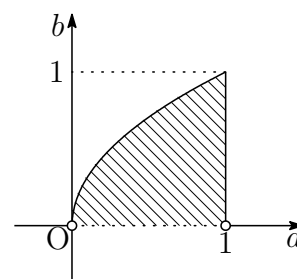
を満たせばよいから

$$-2a^2 + 2a \geq 0, \quad -2b^2 + 2a \leq 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 \leq a \leq 1, \quad a \geq b^2$$

条件より, $a > 0, b > 0$ であるから

$$0 < a \leq 1, \quad b > 0, \quad a \geq b^2$$

よって, 求める領域は、右の図の斜線部分で a 軸上以外の境界線を含む。



補足 仮に $f(1) < 0$ ならば, $f(t)$ は連続関数であるから, $f(1 - \varepsilon) < 0$ となる $\varepsilon > 0$ が存在し, $f(t) \geq 0$ ($-1 \leq t < 1$) に反する. ■

- 3** (1) すべての $m \geq 2$ に対して $a_{m-1} > a_m > 0$ であることを数学的帰納法によって示す.

[1] $m = 2$ のとき $a_1 = 1 > 0$ である. 定義より

$$a_2 = \int_0^{a_1} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$$

条件より, $x > 0$ において $0 < f(x) < 1$ である. $f(x) > 0$ より, 正の区間での積分値は正となるため $a_2 > 0$ である. また, $f(x) < 1$ より

$$a_2 = \int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 1 dx = 1 = a_1$$

したがって, $a_1 > a_2 > 0$ が成り立つ.

[2] $m = k$ のとき成立を仮定する $a_{k-1} > a_k > 0$ が成り立つと仮定する. このとき

$$a_{k+1} = \int_0^{a_k} f(x) dx$$

仮定より $a_k > 0$ であり, $x \in (0, a_k)$ において $f(x) > 0$ であるから, その積分値も正となる. すなわち $a_{k+1} > 0$ である. さらに, $f(x) < 1$ より

$$a_{k+1} = \int_0^{a_k} f(x) dx < \int_0^{a_k} 1 dx = a_k$$

よって, $a_k > a_{k+1} > 0$ が成り立つ.

[1], [2] より, すべての $m \geq 2$ に対して

$$a_{m-1} > a_m > 0$$

が示された.

- (2) すべての m に対して $a_m \geq \frac{1}{2002}$ であると仮定して矛盾を導く. (1) より, 数列 $\{a_m\}$ は単調に減少し, かつ下に有界 ($a_m > 0$) である. したがって, この数列はある実数 α に収束する.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \alpha$$

背理法の仮定より, $\alpha \geq \frac{1}{2002} > 0$ である. 漸化式

$$a_m = \int_0^{a_{m-1}} f(x) dx$$

において $m \rightarrow \infty$ とすると, $f(x)$ が連続であることから

$$\alpha = \int_0^\alpha f(x) dx$$

これを变形すると

$$\int_0^\alpha (1 - f(x)) dx = 0$$

となる.

ところが, 条件より $x > 0$ において $f(x) < 1$, すなわち $1 - f(x) > 0$ である. 仮定より $\alpha > 0$ であるから, 正の関数を 0 から α まで積分した値は必ず正にならなければならない.

$$\int_0^\alpha (1 - f(x)) dx > 0$$

これは先の等式と矛盾する. したがって, $\alpha = 0$ でなければならず, ある m において $a_m < \frac{1}{2002}$ となる m が存在する. ■

4 $x^a = y^b = z^c = xyz$ より (a, b, c は正の整数, $a \leq b \leq c$)

$$x = (xyz)^{\frac{1}{a}}, \quad y = (xyz)^{\frac{1}{b}}, \quad z = (xyz)^{\frac{1}{c}}$$

上の3式の辺々を掛けると

$$xyz = (xyz)^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \quad (*)$$

$a \leq b \leq c$ より, $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{c}$ であるから

$$\frac{3}{a} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad a \leq 3$$

(i) $a = 2$ のとき, これを (*) に代入すると

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad (b-2)(c-2) = 4$$

$c-2 \geq b-2 \geq a-2 = 0$ に注意して

$$\begin{cases} b-2=2 \\ c-2=2 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} b-2=1 \\ c-2=4 \end{cases}$$

これを解いて $(b, c) = (4, 4), (3, 6)$

(ii) $a = 3$ のとき, これを (*) に代入すると

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{3} \quad \text{ゆえに} \quad (2b-3)(2c-3) = 9$$

$2c-3 \geq 2b-3 \geq 2a-3 = 3$ に注意して

$$\begin{cases} 2b-3=3 \\ 2c-3=3 \end{cases}$$

これを解いて $(b, c) = (3, 3)$

(i),(ii) より $(a, b, c) = (2, 4, 4), (2, 3, 6), (3, 3, 3)$ ■

5 (1) $|z+i| = |z-i|$ より $|z+i|^2 = |z-i|^2$

$$(z+i)(\bar{z}-i) = (z-i)(\bar{z}+i) \quad \text{整理すると} \quad i(z-\bar{z}) = 0$$

したがって $z = \bar{z}$ よって z は実数

(2) z は実数であるから

$$\frac{z}{\sqrt{z^2+1}} = \cos \theta, \quad \frac{1}{\sqrt{z^2+1}} = \sin \theta \quad (*)$$

とおくと

$$\begin{aligned} z+i &= \sqrt{z^2+1} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2+1}} + \frac{i}{\sqrt{z^2+1}} \right) \\ &= \sqrt{z^2+1} (\cos \theta + i \sin \theta) \end{aligned}$$

(*) の第 2 式から, $\sin \theta > 0$ より $0 < \arg(z+i) < \pi$

(3) $(z+i)^9 = (z-i)^9$ より $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^9 = 1$

$\frac{z+i}{z-i} \neq 1$ であるから

$$\frac{z+i}{z-i} = w = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \theta = \frac{2k\pi}{9} \quad (k = 1, 2, \dots, 8)$$

とおくと

$$z+i = w(z-i) \quad \text{ゆえに} \quad z = \frac{i(w+1)}{w-1}$$

したがって

$$\begin{aligned} z+i &= \frac{i(w+1) + i(w-1)}{w-1} = \frac{2iw}{w-1} \\ &= \frac{2iw(\bar{w}-1)}{(w-1)(\bar{w}-1)} = \frac{2i(1-w)}{|w-1|^2} \end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned} 2i(1-w) &= 2i(1 - \cos \theta - i \sin \theta) \\ &= 2i \left(2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - 2i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) \\ &= 4 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

よって $\arg(z+i) = \frac{\theta}{2} = \frac{k}{9}\pi \quad (k = 1, 2, \dots, 8)$

別解 (**) $(z+i)^9 = (z-i)^9$ より

$$|z+i|^9 = |z-i|^9 \quad \text{ゆえに} \quad |z+i| = |z-i|$$

(1) の結果から, z は実数である. (**) より

$$\arg(z+i)^9 = \arg(z-i)^9 \quad \text{ゆえに} \quad 9\arg(z+i) = 9\arg(z-i)$$

z は実数であるから

$$z-i = \frac{(z+i)(z-i)}{z+i} = \frac{|z+i|^2}{z+i}$$

上式より, $\arg(z-i) = -\arg(z+i)$ であるから

$$9\arg(z+i) = -9\arg(z+i) + 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

(2) の結果から, $0 < \arg(z+i) < \pi$ であるから

$$\arg(z+i) = \frac{n}{9}\pi \quad (n = 1, 2, \dots, 8)$$

