

平成 23 年度 名古屋大学 2 次試験前期日程 (数学問題)90 分
法・経済・文・教育・情報文化 (社会システム情報) 数 I・II・A・B

問題 1 2 3

- 1 (1) 関数 $y = x^3 - x^2$ のグラフをかけ.
- (2) 曲線 $y = x^3 - x^2$ の接線で、点 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ を通るものをすべて求めよ.
- (3) p を定数とする. x の 3 次方程式 $x^3 - x^2 = p\left(x - \frac{3}{2}\right)$ の異なる実数解の個数を求めよ.
- 2 数字の 2 を書いた玉が 1 個、数字の 1 を書いた玉が 3 個、数字の 0 を書いた玉が 4 個あり、これら合計 8 個の玉が袋に入っている. 以下の (1) から (3) のそれぞれにおいて、この状態の袋から 1 度に 1 個ずつ玉を取り出し、取り出した玉は袋に戻さないものとする.
- (1) 玉を 2 度取り出すとき、取り出した玉に書かれた数字の合計が 2 である確率を求めよ.
- (2) 玉を 4 度取り出すとき、取り出した玉に書かれた数字の合計が 4 以下である確率を求めよ.
- (3) 玉を 8 度取り出すとき、次の条件が満たされる確率を求めよ.
- 条件：すべての $n = 1, 2, \dots, 8$ に対して、1 個目から n 個目までの玉に書かれた数字の合計は n 以下である.
- 3 xy 平面上に 3 点 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ がある.
- (1) $a > 0$ とする. $OP : AP = 1 : a$ を満たす点 P の軌跡を求めよ.
- (2) $a > 1 > b > 0$ とする. $OP : AP : BP = 1 : a : b$ を満たす点 P が存在するための a, b に対する条件を求め、 ab 平面上に図示せよ.

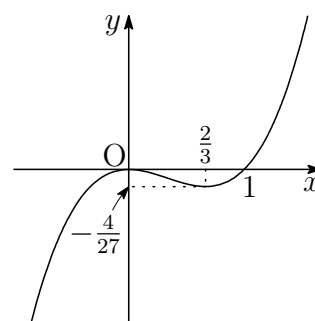
解答例

- 1 (1) $f(x) = x^3 - x^2$ とおくと

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$$

したがって、 $f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{4}{27}$	$\nearrow$



よって、 $y = f(x)$ のグラフは右の図のようになる.

- (2) $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$y - (t^3 - t^2) = (3t^2 - 2t)(x - t)$$

すなわち $y = (3t^2 - 2t)x - 2t^3 + t^2 \quad \cdots (*)$

接線 $(*)$ が点 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ を通るとき

$$0 = (3t^2 - 2t) \cdot \frac{3}{2} - 2t^3 + t^2 \quad \text{すなわち} \quad t(t-2)(4t-3) = 0$$

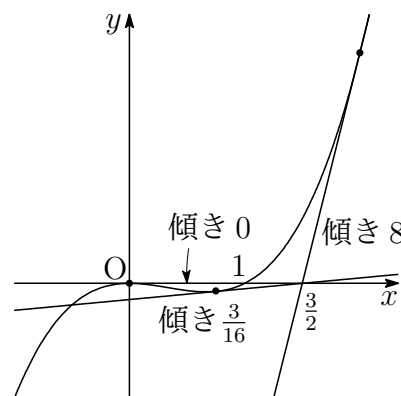
ゆえに $t = 0, 2, \frac{3}{4}$ 求める接線の方程式は、これらを $(*)$ に代入して

$$y = 0, \quad y = 8x - 12, \quad y = \frac{3}{16}x - \frac{9}{32}$$

- (3) 3 次方程式

$$x^3 - x^2 = p \left(x - \frac{3}{2} \right)$$

の異なる実数解の個数は、 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = p \left(x - \frac{3}{2} \right)$ の異なる共有点の個数である. $y = f(x)$ のグラフと (2) で求めた 3 本の接線は右の図のようになる. したがって、求める実数解の個数は



$$\begin{cases} p < 0, \frac{3}{16} < p < 8 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ p = 0, \frac{3}{16}, 8 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ 0 < p < \frac{3}{16}, 8 < p \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \end{cases}$$



- 2 (1) 条件を満たすのは、次の場合である.

回 数		
①	②	確率
2	0	$\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{7}$
0	2	$\frac{4}{8} \cdot \frac{1}{7}$
1	1	$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7}$

よって、求める確率は $\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{4}$

- (2) 玉を4度取り出すとき、取り出した玉に書かれた数字の合計が5以上である確率は、4度とも1または2が書かれた玉が出る確率であるから

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{70}$$

求める確率は、この事象の余事象の確率であるから

$$1 - \frac{1}{70} = \frac{69}{70}$$

- (3) 袋の中の玉の数字の合計の最大値は $2 \times 1 + 1 \times 3 = 5$ であるから、 $k \geq 5$ のとき数字の和が $k+1 \geq 6$ となる事象は起こり得ない. したがって、はじめて和が $k+1$ となる事象の確率は ($k = 1, 2, 3, 4$) を考えればよく、 k 個取り出したときにはじめて1個目から k 個目までの数字の和が $k+1$ となる事象の確率は ($k = 1, 2, 3, 4$)

回 数				
①	②	③	④	確 率
2	*	*	*	$\frac{1}{8}$
1	2	*	*	$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{7}$
1	1	2	*	$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6}$
1	1	1	2	$\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5}$

この確率は $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$

求める確率は、この事象の余事象の確率であるから

$$1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$



3 (1) 点 P の座標を (x, y) とすると

$$OP^2 = x^2 + y^2, \quad AP^2 = (x-1)^2 + y^2$$

OP : AP = 1 : a より, $AP^2 = a^2 OP^2$ であるから

$$(x-1)^2 + y^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

整理すると $(1-a^2)x^2 + (1-a^2)y^2 - 2x + 1 = 0$

よって $a = 1$ のとき 直線 $x = \frac{1}{2}$

$$a \neq 1 \text{ のとき } \quad \text{円} \quad \left(x - \frac{1}{1-a^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{1-a^2}\right)^2$$

(2) (1) と同様に, OP : BP = 1 : b を満たす点 P の軌跡は ($0 < b < 1$)

$$\text{円} \quad x^2 + \left(y - \frac{1}{1-b^2}\right)^2 = \left(\frac{b}{1-b^2}\right)^2$$

ここで, (1) で求めた円を C_1 , 上の円を C_2 とする.

C_1, C_2 の半径をそれぞれ r_1, r_2 とし, 中心間の距離を d とすると

$$|r_1 - r_2| \leq d \leq r_1 + r_2 \quad \text{ゆえに} \quad |r_1 - r_2|^2 \leq d^2 \leq (r_1 + r_2)^2$$

整理すると $-2r_1r_2 \leq d^2 - r_1^2 - r_2^2 \leq 2r_1r_2$

すなわち $|d^2 - r_1^2 - r_2^2| \leq 2r_1r_2 \quad \cdots (*)$

このとき

$$\begin{aligned}
 d^2 - r_1^2 - r_2^2 &= \left(\frac{1}{1-a^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{1-b^2} \right)^2 - \left(\frac{a}{1-a^2} \right)^2 - \left(\frac{b}{1-b^2} \right)^2 \\
 &= \frac{1-a^2}{(1-a^2)^2} + \frac{1-b^2}{(1-b^2)^2} = \frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2}, \\
 r_1 r_2 &= \frac{a}{|1-a^2|} \cdot \frac{b}{|1-b^2|} = \frac{ab}{|(1-a^2)(1-b^2)|}
 \end{aligned}$$

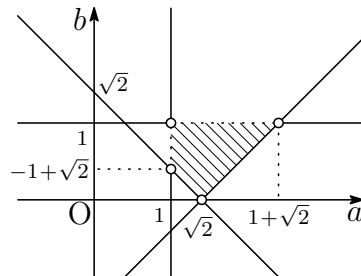
これらを(*)に代入すると

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-b^2} \right| &\leq \frac{2ab}{|(1-a^2)(1-b^2)|} \\
 |a^2 + b^2 - 2| &\leq 2ab \\
 -2ab &\leq a^2 + b^2 - 2 \leq 2ab
 \end{aligned}$$

ゆえに $(a+b)^2 \geq 2$ かつ $(a-b)^2 \leq 2$

よって $a > 1 > b > 0$, $a+b \geq \sqrt{2}$, $a-b \leq \sqrt{2}$

したがって, ab 平面上の不等式の表す領域は下の図の斜線部分で, $\circ$ と点線以外の境界線を含む.



■