

平成22年度 名古屋大学 2次試験前期日程(数学問題)90分
法・経済・文・教育・情報文化(社会システム情報)数I・II・A・B

問題 1 2 3

1 xy 平面上の長方形 ABCD が次の条件 (a), (b), (c) を満たしているとする.

- (a) 対角線 AC と BD の交点は原点 O に一致する.
- (b) 直線 AB の傾きは 2 である.
- (c) A の y 座標は, B, C, D の y 座標より大きい.

このとき, $a > 0$, $b > 0$ として, 辺 AB の長さを $2\sqrt{5}a$, BC の長さを $2\sqrt{5}b$ とおく.

- (1) A, B, C, D の座標を a, b で表せ.
- (2) 長方形 ABCD が領域 $x^2 + (y - 5)^2 \leq 100$ に含まれるための a, b に対する条件を求め, ab 平面上に図示せよ.

2 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

により定める.

- (1) a, b は実数とする. $y = ax + b$ のグラフと $y = f(x)$ のグラフがちょうど 2 つの交点を持つための a, b に対する条件を求めよ.
- (2) p, q は実数で $p > 0$ とする. $y = x^3 + 6px^2 + 9p^2x + q$ のグラフと $y = f(x)$ のグラフがちょうど 4 つの交点を持つための p, q に対する条件を求め, pq 平面上に図示せよ.

3 はじめに, A が赤玉を 1 個, B が白玉を 1 個, C が青玉を 1 個持っている. 表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ の硬貨を投げ, 表が出れば A と B の玉を交換し, 裏が出れば B と C の玉を交換する, という操作を考える. この操作を n 回 ($n = 1, 2, 3, \dots$) くり返した後に A, B, C が赤玉を持っている確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とおく.

- (1) $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ を求めよ.
- (2) $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ を a_n, b_n, c_n で表せ.
- (3) n が奇数ならば $a_n = b_n > c_n$ が成り立ち, n が偶数ならば $a_n > b_n = c_n$ が成り立つことを示せ.
- (4) b_n を求めよ.

解答例

- 1 (1) 辺DA, CDの中点をそれぞれM, Nとする.
直線ABの傾きが2, ABの長さが $2\sqrt{5}a$ であるから

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = a(1, 2)$$

直線BCの傾きが $-\frac{1}{2}$, BCの長さが $2\sqrt{5}b$ であるから

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = b(2, -1)$$

$$\text{したがって } \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + (-\overrightarrow{ON}) = (a - 2b, 2a + b)$$

$$\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OM} + (-\overrightarrow{ON}) = (-a - 2b, -2a + b)$$

$$\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = (-a + 2b, -2a - b)$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = (a + 2b, 2a - b)$$

よって $A(a - 2b, 2a + b), B(-a - 2b, -2a + b),$

$C(-a + 2b, -2a - b), D(a + 2b, 2a - b)$

- (2) 長方形ABCDが領域 $x^2 + (y - 5)^2 \leq 100$ に含まれる, すなわち, 長方形ABCDの4頂点A, B, C, Dがこの領域に含まれる条件を求める.

$f(x, y) = x^2 + (y - 5)^2$ とおくと, $f(A), f(B), f(C), f(D)$ の最大値が100以下である条件を求めればよい.

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) - 10y + 25$$

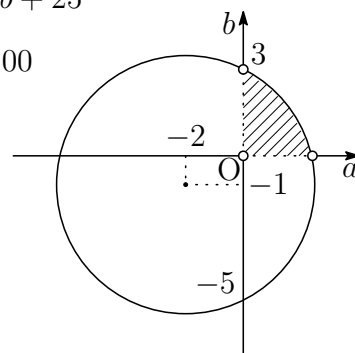
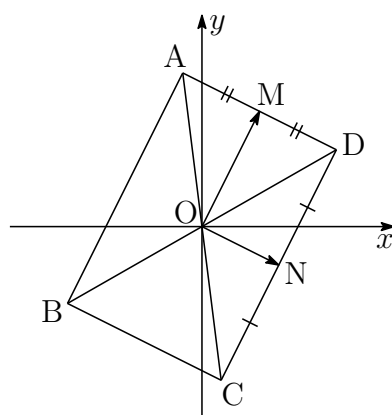
OA = OB = OC = ODであるから, $-10y$ を最大にする点Cで $f(x, y)$ は最大となり, このとき

$$\begin{aligned} f(-a + 2b, -2a - b) &= (-a + 2b)^2 + (-2a - b)^2 - 10(-2a - b) + 25 \\ &= 5a^2 + 5b^2 + 20a + 10b + 25 \end{aligned}$$

$$\text{したがって } 5a^2 + 5b^2 + 20a + 10b + 25 \leq 100$$

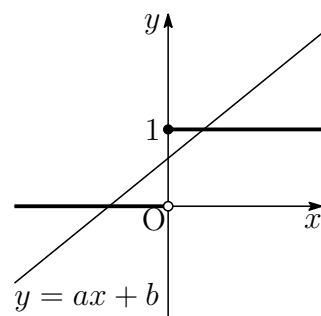
$$\text{整理すると } (a + 2)^2 + (b + 1)^2 \leq 20$$

上式および $a > 0, b > 0$ であることから, 求める領域は, 右の図の斜線部分で, a 軸, b 軸上の点を除く. ■



- 2** (1) $y = ax + b$ のグラフと $y = f(x)$ のグラフがちょうど2つの交点をもつとき、右の図から

$$a > 0, \quad 0 < b \leq 1$$

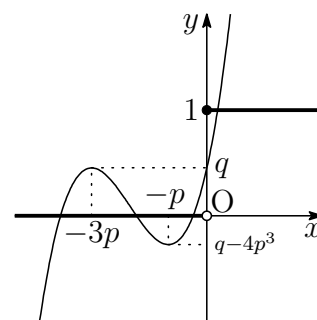


- (2) $g(x) = x^3 + 6px^2 + 9p^2x + q$ とおくと

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 + 12px + 9p^2 \\ &= 3(x + p)(x + 3p) \end{aligned}$$

$p > 0$ より $-3p < -p < 0$ であるから、 $g(x)$ の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-3p$	$\cdots$	$-p$	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	q	$\searrow$	$q - 4p^3$	$\nearrow$



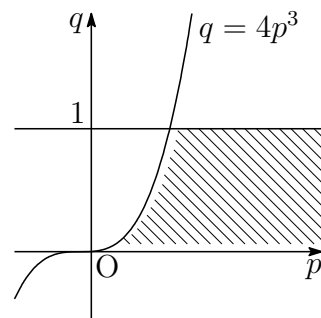
$g(-3p) > 0$, $g(-p) < 0$, $0 < g(0) \leq 1$ を満たせばよいから

$$q > 0, \quad q - 4p^3 < 0, \quad 0 < q \leq 1$$

よって、 p , q の満たす条件は

$$\begin{cases} 0 < q \leq 1 \\ q < 4p^3 \end{cases}$$

(p, q) の満たす領域は、右の図の斜線部分で、 p 軸および曲線 $q = 4p^3$ は含まない。



- 3 (1) 硬貨を1回投げ、Aが赤玉を持つのは裏が出る確率であるから

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

硬貨を1回投げ、Bが赤玉を持つのは表が出る確率であるから

$$b_1 = \frac{1}{2}$$

硬貨を1回投げ、Cが赤玉を持つことはないから、その確率は

$$c_1 = 0$$

次の確率漸化式が成立する.

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} \text{表のとき} \\ \begin{array}{ccc} n & & n+1 \\ A & \searrow & A \\ B & \nearrow & B \\ C & \longrightarrow & C \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{裏のとき} \\ \begin{array}{ccc} n & & n+1 \\ A & \longrightarrow & A \\ B & \searrow & B \\ C & \nearrow & C \end{array} \end{array}$$

$a_1 = b_1 = \frac{1}{2}$, $c_1 = 0$ であるから (*) により

$$a_2 = \frac{1}{2}, \quad b_2 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = \frac{1}{4}$$

- (2) (*) より

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n, \quad c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$$

- (3) (*) より

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - c_n), \quad b_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n)$$

ここで, $x_n = a_n - b_n$, $y_n = b_n - c_n$ とおくと

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}y_n, \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}x_n, \quad x_1 = 0, \quad y_1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{ゆえに } x_{n+1} + y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n), \quad x_{n+1} - y_{n+1} = -\frac{1}{2}(x_n - y_n)$$

$$\text{したがって } x_n + y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad x_n - y_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

上の2式から $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$$y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

n が奇数ならば $x_n = 0, y_n > 0$ すなわち $a_n = b_n > c_n$

n が偶数ならば $x_n > 0, y_n = 0$ すなわち $a_n > b_n = c_n$

$$(4) \quad x_n - y_n = (a_n - b_n) - (b_n - c_n) = a_n - 2b_n + c_n = 1 - 3b_n$$

したがって $1 - 3b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ よって $b_n = \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\}$

別解 $a_n + b_n + c_n = 1$ であるから, (*) の第2式より

$$b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \left(b_n - \frac{1}{3} \right)$$

したがって $b_n - \frac{1}{3} = \left(b_1 - \frac{1}{3} \right) \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}$

よって $b_n = \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\}$ ■