

平成 21 年度 名古屋大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 90 分
法・経済・文・教育・情報文化 (社会システム情報) 数 I・II・A・B

問題 1 2 3

1 空間のベクトル $\vec{OA} = (1, 0, 0)$, $\vec{OB} = (a, b, 0)$, $\vec{OC}$ が, 条件

$$|\vec{OB}| = |\vec{OC}| = 1, \quad \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{1}{3}, \quad \vec{OA} \cdot \vec{OC} = \frac{1}{2}, \quad \vec{OB} \cdot \vec{OC} = \frac{5}{6}$$

をみたしているとする. ただし, a, b は正の数とする.

- (1) a, b の値を求めよ.
- (2) 三角形 OAB の面積 S を求めよ.
- (3) 四面体 OABC の体積 V を求めよ.

2 放物線 $y = ax^2$ ($a > 0$) と円 $(x - b)^2 + (y - 1)^2 = 1$ ($b > 0$) が, 点 $P(p, q)$ で接しているとする. ただし, $0 < p < b$ とする. この円の中心 Q から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点を R としたとき, $\angle PQR = 120^\circ$ であるとする. ここで, 放物線と円が点 P で接するとは, P が放物線と円の共有点であり, かつ点 P における放物線の接線と点 P における円の接線が一致することである.

- (1) a, b の値を求めよ.
- (2) 点 P と点 R を結ぶ短い方の弧と x 軸, および放物線で囲まれた部分の面積を求めよ.

3 さいころを投げると, 1 から 6 までの整数の目が等しい確率で出るとする. さいころを n 回 ($n = 1, 2, 3, \dots$) 投げるとき, 出る目の積の一の位が j ($j = 0, 1, 2, \dots, 9$) となる確率を $p_n(j)$ とする.

- (1) $p_2(0), p_2(1), p_2(2)$ を求めよ.
- (2) $p_{n+1}(1)$ を, $p_n(1)$ と $p_n(7)$ を用いて表せ.
- (3) $p_n(1) + p_n(3) + p_n(7) + p_n(9)$ を求めよ.

解答例

1 (1) $\overrightarrow{OA} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{OB} = (a, b, 0)$ について

$$|\overrightarrow{OB}| = 1 \text{ より } a^2 + b^2 = 1, \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{3} \text{ より } a = \frac{1}{3}$$

$$\text{上の 2 式から } \left(\frac{1}{3}\right)^2 + b^2 = 1 \quad b > 0 \text{ であるから } b = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(2) $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}$ であるから

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 \cdot 1^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

(3) $\overrightarrow{OC} = (x, y, z)$ とする. $\overrightarrow{OA} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{OB} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, 0\right)$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2} \text{ より } x = \frac{1}{2}, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{5}{6} \text{ より } \frac{1}{3}x + \frac{2\sqrt{2}}{3}y = \frac{5}{6}$$

$$\text{上の 2 式から } \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}y = \frac{5}{6} \quad \text{ゆえに } y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|\overrightarrow{OC}| = 1 \text{ より } \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + z^2 = 1 \quad \text{ゆえに } |z| = \frac{1}{2}$$

3 点 O, A, B は xy 平面上にあるから

$$V = \frac{1}{3} S |z| = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{18}$$



2 (1) $y = ax^2$ より $y' = 2ax$

放物線 $y = ax^2$ 上の点 $P(p, ap^2)$ における
接線の傾きは $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ であるから

$$2ap = \sqrt{3} \quad \text{ゆえに} \quad P\left(p, \frac{\sqrt{3}}{2}p\right)$$

$$PQ=1 \text{ より, } \overrightarrow{PQ} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \left(p + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}p - \frac{1}{2}\right)$$

Q の y 座標は 1 であるから

$$\frac{\sqrt{3}}{2}p - \frac{1}{2} = 1 \quad \text{これを解いて} \quad p = \sqrt{3} \quad \text{ゆえに} \quad Q\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 1\right)$$

したがって $b = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ また, $2ap = \sqrt{3}$ により $a = \frac{1}{2}$

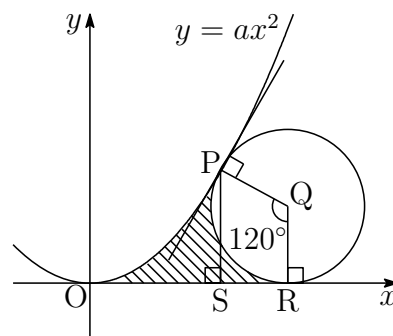
P, Q から x 軸にそれぞれ垂線 PS, QR を引くと, 台形 PQRS と半径が 1
で中心角 $\frac{2\pi}{3}$ の扇形の面積はそれぞれ

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{8}\sqrt{3}, \quad \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

よって, 求める面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2}x^2 dx + \frac{5}{8}\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} &= \left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^{\sqrt{3}} + \frac{5}{8}\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{8}\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{9}{8}\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

■



- 3** (1) 1回目と2回目に出た目の積の一の位の数
は右の表のようになるから

$$p_2(0) = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$$

$$p_2(1) = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$$

$$p_2(2) = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$$

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	0	2
3	3	6	9	2	5	8
4	4	8	2	6	0	4
5	5	0	5	0	5	0
6	6	2	8	4	0	6

- (2) さいころを n 回まで投げた目の積の一の位と $n+1$ 回目のサイコロの目の積の一の位は次の表のようになる.

	n 回目までの目の積の一の位									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4

よって
$$p_{n+1}(1) = \frac{1}{6}p_n(1) + \frac{1}{6}p_n(7)$$

- (3) (2) と同様にして

$$p_{n+1}(3) = \frac{1}{6}p_n(1) + \frac{1}{6}p_n(3)$$

$$p_{n+1}(7) = \frac{1}{6}p_n(7) + \frac{1}{6}p_n(9)$$

$$p_{n+1}(9) = \frac{1}{6}p_n(3) + \frac{1}{6}p_n(9)$$

(2) の結果と上の3式の辺々を加えると

$$p_{n+1}(1) + p_{n+1}(3) + p_{n+1}(7) + p_{n+1}(9) = \frac{1}{3}(p_n(1) + p_n(3) + p_n(7) + p_n(9))$$

ここで, $p_1(1) + p_1(3) + p_1(7) + p_1(9) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 0 + 0 = \frac{1}{3}$ であるから

$$p_n(1) + p_n(3) + p_n(7) + p_n(9) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} = \frac{1}{3^n}$$

