

平成16年度 名古屋大学 2次試験前期日程(数学問題)90分
法・経済・文・教育・情報文化(社会システム情報)数I・II・A・B

- 法・文・教育・情報文化学部 [1] [2] [3]
- 経済学部 [1] [2] 必答, [3] [4] より1題選択

[1] サイコロの出た目の数だけ数直線を正の方向に移動するゲームを考える。ただし, 8をゴールとしてちょうど8の位置へ移動したときにゲームを終了し, 8をこえた分についてはその数だけ戻る。たとえば, 7の位置で3が出た場合, 8から2戻って6へ移動する。なお, サイコロは1から6までの目が等確率で出るものとする。原点から始めて, サイコロを n 回投げ終えたときに8へ移動してゲームを終了する確率を p_n とおく。

- (1) p_2 を求めよ。
- (2) p_3 を求めよ。
- (3) p_4 を求めよ。

[2] a を実数とする。 $f(x) = x^3 + ax^2 + (3a - 6)x + 5$ について以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = f(x)$ が極値をもつ a の範囲を求めよ。
- (2) 関数 $y = f(x)$ が極値をもつ a に対して, 関数 $y = f(x)$ は $x = p$ で極大値, $x = q$ で極小値をとるとする。関数 $y = f(x)$ のグラフ上の2点 $P(p, f(p))$, $Q(q, f(q))$ を結ぶ直線の傾き m を a を用いて表せ。

[3] i を虚数単位とする。 $z_1 = 3$ および, 漸化式 $z_{n+1} = (1 + i)z_n + i$ ($n \geq 1$) によって定まる複素数からなる数列 $\{z_n\}$ について, 以下の問いに答えよ。

- (1) z_n を求めよ。
- (2) すべての正の整数 m について, $z_{8m-7} = 2^{4m-2} - 1$ となることを示せ。
- (3) 複素数 z_n が表す複素数平面の点を P_n とする。 P_n, P_{n+1}, P_{n+2} を3頂点とする三角形の面積を求めよ。

[4] E を2次の単位行列とする。整数 a, b, c, d を成分とする行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2 = -E, b + c = 0, b \geq 0$ という条件をみたすとする。また, $B = \sqrt{3}A - E$ とおく。

- (1) 行列 A を求めよ。
- (2) $B^n = 2^n E$ をみたす正の整数 n で最小のものを求めよ。
- (3) 正の整数 n に対して $B^n = p_n E + q_n A$ をみたす実数 p_n と q_n を求めよ。

解答例

- 1** (1) 1回目に出た目を x_1 , 2回目に出た目を x_2 とすると, 2回目で終了するとき, $x_1 + x_2 = 8$ となる次の5組である.

$$(x_1, x_2) = (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$$

よって, 求める確率は $\frac{5}{6^2} = \frac{5}{36}$

- (2) 2回目で終了しないとき, その時点の数直線上の座標は2~7の6通り.
2回目で終了しないときに3回目で終了する確率(条件付き確率)が $\frac{1}{6}$ であるから, 3回目で終了する確率は

$$(1 - p_2) \times \frac{1}{6} = \left(1 - \frac{5}{36}\right) \times \frac{1}{6} = \frac{31}{216}$$

- (3) (2) の考察から

$$3 \text{ 回目で終了しない確率は } (1 - p_2) \times \frac{5}{6}$$

よって, 4回目で終了する確率は

$$(1 - p_2) \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{31}{6^2} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{155}{1296}$$



- 2** (1) $f(x) = x^3 + ax^2 + (3a - 6)x + 5$ より

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3a - 6$$

$f'(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつことであるから

$$D/4 = a^2 - 3(3a - 6) = a^2 - 9a + 18 = (a - 3)(a - 6) > 0$$

これを解いて $a < 3, 6 < a$

- (2) $f(x)$ を $f'(x)$ で割ることにより

$$f(x) = f'(x) \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}a \right) + \left(-\frac{2}{9}a^2 + 2a - 4 \right) x - \frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{3}a + 5$$

$f'(p) = 0, f'(q) = 0$ であるから

$$f(p) = \left(-\frac{2}{9}a^2 + 2a - 4 \right) p - \frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{3}a + 5$$

$$f(q) = \left(-\frac{2}{9}a^2 + 2a - 4 \right) q - \frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{3}a + 5$$

$p \neq q$ であるから, 2 点 $P(p, f(p)), Q(q, f(q))$ を通る直線の方程式は

$$y = \left(-\frac{2}{9}a^2 + 2a - 4 \right) x - \frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{3}a + 5$$

よって, 求める直線の傾き m は

$$m = -\frac{2}{9}a^2 + 2a - 4$$

■

- 3** (1) $z_{n+1} = (1 + i)z_n + i$ より ($n \geq 1$)

$$z_{n+1} + 1 = (1 + i)(z_n + 1) \quad \text{ゆえに} \quad z_n + 1 = (1 + i)^{n-1}(z_1 + 1)$$

$$z_1 = 3 \text{ より} \quad z_n = 4(1 + i)^{n-1} - 1$$

- (2) (1) の結果に $n = 8m - 7$ を代入すると

$$\begin{aligned} z_{8m-7} &= 4(1 + i)^{8m-8} - 1 = 4\{(1 + i)^2\}^{4m-4} - 1 \\ &= 4(2i)^{4m-4} - 1 = 4 \cdot 2^{4m-4} (i^4)^{m-1} - 1 \\ &= 2^{4m-2} - 1 \end{aligned}$$

(3) (1) の結果から

$$\begin{aligned}
 z_{n+1} - z_n &= 4(1+i)^n - 4(1+i)^{n-1} \\
 &= 4\{(1+i) - 1\}(1+i)^{n-1} \\
 &= 4i(1+i)^{n-1} \\
 z_{n+2} - z_n &= 4(1+i)^{n+1} - 4(1+i)^{n-1} \\
 &= 4\{(1+i)^2 - 1\}(1+i)^{n-1} \\
 &= 4(-1+2i)(1+i)^{n-1} \\
 (z_{n+1} - z_n)\overline{(z_{n+2} - z_n)} &= 4i(1+i)^{n-1} \cdot 4(-1-2i)(1-i)^{n-1} \\
 &= 16(2-i)2^{n-1} \\
 &= 2^{n+4} - 2^{n+3}i
 \end{aligned}$$

求める三角形の面積を S_n とすると

$$S_n = \frac{1}{2} \left| \operatorname{Im}\{(z_{n+1} - z_n)\overline{(z_{n+2} - z_n)}\} \right| = \frac{1}{2} |-2^{n+3}| = 2^{n+2}$$

別解 $z_{n+1} - z_n = i(z_n + 1)$, $z_{n+2} - z_n = (-1 + 2i)(z_n + 1)$ より

$$\begin{aligned}
 (z_{n+1} - z_n)\overline{(z_{n+2} - z_n)} &= i(z_n + 1)(-1 - 2i)\overline{(z_n + 1)} \\
 &= (2 - i)|z_n + 1|^2 = (2 - i)|4(1+i)^{n-1}|^2 \\
 &= (2 - i) \cdot 16 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+3}(2 - i) \\
 &= 2^{n+4} - 2^{n+3}i
 \end{aligned}$$

解説 複素数平面上の3点 O, A(α), B(β) を頂点とする $\triangle OAB$ の面積 S は

$$\theta = \angle \alpha O \beta \text{ とすると } \cos \theta + i \sin \theta = \frac{\frac{\beta}{|\beta|}}{\frac{\alpha}{|\alpha|}} = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \cdot \frac{\bar{\alpha}\beta}{\alpha\bar{\alpha}} = \frac{\bar{\alpha}\beta}{|\alpha||\beta|}$$

$$\sin \theta = \frac{\operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta)}{|\alpha||\beta|} \text{ であるから } S = \frac{1}{2} |\alpha||\beta| |\sin \theta| = \frac{1}{2} |\operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta)|$$

また, $\operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta) = -\operatorname{Im}(\alpha\bar{\beta})$ であるから

$$S = \frac{1}{2} |\operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta)| = \frac{1}{2} |\operatorname{Im}(\alpha\bar{\beta})|$$



- 4 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ にハミルトン・ケリーの定理を適用すると

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O$$

条件 $A^2 = -E$ を上式に代入して整理すると

$$(a + d)A = (ad - bc - 1)E$$

$a + d \neq 0$ と仮定すると、実数 k を用いて、 $A = kE$ とおくと

$$A^2 = k^2E \neq -E$$

これは条件に反するので $a + d = 0$ また、 $b + c = 0$ より

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

であるから、 $A^2 = -E$ より

$$\begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 0 \\ 0 & a^2 - b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

したがって $(a + b)(a - b) = -1$

a, b は整数であるから $a + b = \pm 1, a - b = \mp 1$ (複号同順)

$b \geq 0$ であるから $a = 0, b = 1$ よって $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

- (2) $B = \sqrt{3}A - E$ より

$$B = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \cos \frac{4}{3}\pi & -\sin \frac{4}{3}\pi \\ \sin \frac{4}{3}\pi & \cos \frac{4}{3}\pi \end{pmatrix}$$

したがって、 $B^n = 2^n E$ をみたす正の整数で最小のものは $n = 3$

(3) $B = \sqrt{3}A - E$, $A^2 = -E$, $B^n = p_n E + q_n A$ より

$$\begin{aligned} B^{n+1} &= (\sqrt{3}A - E)(p_n E + q_n A) \\ &= -p_n E + (\sqrt{3}p_n - q_n)A + \sqrt{3}q_n A^2 \\ &= (-p_n - \sqrt{3}q_n)E + (\sqrt{3}p_n - q_n)A \end{aligned}$$

したがって $p_{n+1} = -p_n - \sqrt{3}q_n$, $q_{n+1} = \sqrt{3}p_n - q_n$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} \cos \frac{2}{3}\pi & -\sin \frac{2}{3}\pi \\ \sin \frac{2}{3}\pi & \cos \frac{2}{3}\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

条件から, $p_0 = 1$, $q_0 = 0$ であるから

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} \cos \frac{2n}{3}\pi & -\sin \frac{2n}{3}\pi \\ \sin \frac{2n}{3}\pi & \cos \frac{2n}{3}\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって $p_n = 2^n \cos \frac{2n}{3}\pi$, $q_n = 2^n \sin \frac{2n}{3}\pi$ ■