

平成15年度 名古屋大学 2次試験前期日程(数学問題)90分
法・経済・文・教育・情報文化(社会システム情報)数I・II・A・B

- 法・文・教育・情報文化学部 [1] [2] 必答, [3] [4] より1題選択
- 経済学部 [2] [4] 必答, [1] [5] より1題選択

[1] $\triangle OAB$ の頂角 $\angle O$ の二等分線と辺 AB との交点を P , 点 P から直線 OA へ下ろした垂線の足を Q とする. 以下では, $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$ とする.

- (1) P は線分 AB を $|\vec{a}| : |\vec{b}|$ に内分する点であることを証明せよ.
- (2) 線分の長さ OQ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ.

[2] 放物線 $C: y = ax^2$ ($a > 0$) を考える. 放物線 C 上の点 $P(p, ap^2)$ ($p \neq 0$) における C の接線と直交し, P を通る直線を ℓ とする. 直線 ℓ と放物線 C とで囲まれる図形の面積を $S(P)$ とする.

- (1) 直線 ℓ の方程式を求めよ.
- (2) 点 P を $p > 0$ の範囲で動かす. $S(P)$ が最小となるときの, 直線 ℓ の傾き m と $S(P)$ を求めよ.

[3] n を自然数とすると, $m \leq n$ で m と n の最大公約数が1となる自然数 m の個数を $f(n)$ とする.

- (1) $f(15)$ を求めよ.
- (2) p, q を互いに異なる素数とする. このとき $f(pq)$ を求めよ.

[4] 一つの箱の中に1から10までの数が書かれたカードが4枚ずつ計40枚入っている. この箱から k 枚 ($3 \leq k \leq 12$) のカードを同時に取り出す. このうちの3枚のカードが同じ数で残りはこれとは違う互いに異なる数となる確率を $p(k)$ とする.

- (1) $p(k)$ を求めよ.
- (2) $4 \leq k \leq 12$ のとき, $f(k) = \frac{p(k-1)}{p(k)}$ を求めよ.
- (3) $p(k)$ を最大にする k の値を求めよ.

- 5** a を 0 でない実数とする．座標平面上の点列 $\{P_n(x_n, y_n)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を次のように定める． $(x_0, y_0) = (0, 0)$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a^2 & a \\ 2a^3 & -3a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) P_n ($n \geq 1$) の座標を求めよ．
- (2) $P_n = P_1$ となる $n \geq 2$ が存在するための a の条件を求めよ．そのときの点列をすべて求めよ．

解答例

1 (1) $\theta = \angle AOP = \angle BOP$ とおくと

$$\triangle AOP : \triangle BOP = AP : PB \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{また } \triangle AOP = \frac{1}{2} OA \cdot OP \sin \theta$$

$$\triangle BOP = \frac{1}{2} OB \cdot OP \sin \theta$$

$$\text{したがって } \triangle AOP : \triangle BOP = OA : OB \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } AP : PB = OA : OB = |\vec{a}| : |\vec{b}|$$

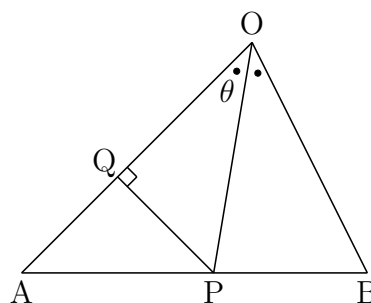
$$(2) (1) \text{ の結果から } \vec{OP} = \frac{|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{OP}}{|\vec{a}| |\vec{OP}|} \text{ より } |\vec{OP}| \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{OP}}{|\vec{a}|} \quad \dots \textcircled{4}$$

$$OQ = |\vec{OP}| \cos \theta \text{ であるから, } \textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ より}$$

$$OQ = \frac{\vec{a} \cdot (|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b})}{|\vec{a}|(|\vec{a}| + |\vec{b}|)} = \frac{|\vec{b}||\vec{a}|^2 + |\vec{a}|(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}|(|\vec{a}| + |\vec{b}|)} = \frac{|\vec{a}||\vec{b}| + \vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$$

■

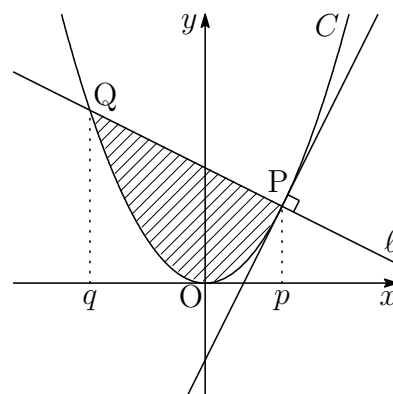


- 2** (1) $y = ax^2$ を微分すると $y' = 2ax$

$$x = p \text{ のとき } y' = 2ap$$

ℓ は点 $P(p, ap^2)$ を通り, 傾き $-\frac{1}{2ap}$ の直線であるから

$$y - ap^2 = -\frac{1}{2ap}(x - p)$$



- (2) ℓ と C の共有点で P と異なる点を $Q(q, aq^2)$ とすると

$$aq^2 - ap^2 = -\frac{1}{2ap}(q - p) \quad \text{ゆえに} \quad a(q + p)(q - p) = -\frac{1}{2ap}(q - p)$$

$q - p \neq 0$ であるから

$$a(q + p) = -\frac{1}{2ap} \quad \text{ゆえに} \quad q = -p - \frac{1}{2a^2p}$$

ℓ と C で囲まれた部分の面積 $S(P)$ は

$$\begin{aligned} S(P) &= \int_q^p \left\{ -\frac{1}{2ap}(x - p) + ap^2 - ax^2 \right\} dx \\ &= \int_q^p (p - x) \left\{ \frac{1}{2ap} + a(p + x) \right\} dx \\ &= a \int_q^p (p - x) \left(x + p + \frac{1}{2a^2p} \right) dx \\ &= a \int_q^p (p - x)(x - q) dx = \frac{a}{6}(p - q)^3 = \frac{a}{6} \left(2p + \frac{1}{2a^2p} \right)^3 \end{aligned}$$

相加平均・相乗平均の大小関係により

$$2p + \frac{1}{2a^2p} \geq 2\sqrt{2p \cdot \frac{1}{2a^2p}} = \frac{2}{a}$$

上式において, 等号が成立するとき

$$2p = \frac{1}{2a^2p} \quad \text{ゆえに} \quad 2ap = 1$$

このとき, (1) の結果から, ℓ の傾き m は $m = -1$

$$S(P) = \frac{a}{6} \left(\frac{2}{a} \right)^3 = \frac{4}{3a^2}$$



3 (1) 15 と互いに素である数は

$$1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14$$

の 8 個であるから $f(15) = 8$

別解 15 以下の自然数について, $15 = 3 \times 5$ より

$$3 \text{ の倍数の個数は } \frac{15}{3}$$

$$5 \text{ の倍数の個数は } \frac{15}{5}$$

$$15 \text{ の倍数の個数は } \frac{15}{15}$$

よって

$$f(15) = 15 - \frac{15}{3} - \frac{15}{5} + \frac{15}{15} = 8$$

(2) pq 以下の自然数について

$$p \text{ の倍数の個数は } \frac{pq}{p}$$

$$q \text{ の倍数の個数は } \frac{pq}{q}$$

$$pq \text{ の倍数の個数は } \frac{pq}{pq}$$

よって

$$f(pq) = pq - \frac{pq}{p} - \frac{pq}{q} + \frac{pq}{pq} = (p-1)(q-1)$$

補足 1 から n までの自然数のうちで, n と互いに素であるものの個数を表す関数 $\varphi(n)$ を, オイラーのトーシェント関数 (Euler's totient function) または φ 関数 (phi function) という¹. 本題は, これに因んだ出題である. ■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/saga/saga_2005.pdf (pp.4-8)

4 (1) 40 枚から k 枚取り出す場合の数は

$${}_{40}C_k \quad (\text{通り})$$

k 枚を取り出すとき、3 枚が同じ数で、残り $k-3$ 枚がこの 3 枚も含め互いに異なる数となる場合の数について

- 3 枚が同じ数となる場合の数は、同じ数となる 10 通りに対し、その 3 枚のカードの取り方が ${}_4C_3$ 通りであるから

$$10 \times {}_4C_3 \quad (\text{通り})$$

- 残り $k-3$ 枚が互いに異なる場合の数は、異なる数 ${}_9C_{k-3}$ 通りに対し、そのカード取り方がそれぞれ 4 通り、すなわち、 4^{k-3} 通りであるから

$${}_9C_{k-3} \times 4^{k-3} \quad (\text{通り})$$

したがって

$$p(k) = \frac{10 \times {}_4C_3 \times {}_9C_{k-3} \times 4^{k-3}}{{}_{40}C_k} = \frac{10 \times {}_9C_{k-3} \times 4^{k-2}}{{}_{40}C_k}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} f(k) &= \frac{p(k-1)}{p(k)} = \frac{10 \times {}_9C_{k-4} \times 4^{k-3}}{{}_{40}C_{k-1}} \times \frac{{}_{40}C_k}{10 \times {}_9C_{k-3} \times 4^{k-2}} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{{}_{40}C_k}{{}_{40}C_{k-1}} \times \frac{{}_9C_{k-4}}{{}_9C_{k-3}} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{40!}{k!(40-k)!} \cdot \frac{(k-1)!(41-k)!}{40!} \\ &\quad \times \frac{9!}{(k-4)!(13-k)!} \cdot \frac{(k-3)!(12-k)!}{9!} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{41-k}{k} \times \frac{k-3}{13-k} = \frac{(41-k)(k-3)}{4k(13-k)} \end{aligned}$$

$$(3) (2) \text{ の結果から } \frac{p(k)}{p(k-1)} = \frac{4k(13-k)}{(41-k)(k-3)}$$

$$\frac{p(k)}{p(k-1)} - 1 = \frac{-3k^2 + 8k + 123}{(41-k)(k-3)} = \frac{123 - k(3k-8)}{(41-k)(k-3)}$$

ここで、 $g(k) = 123 - k(3k-8)$ とおくと

$$4 \leq k \leq 7 \text{ のとき } g(k) > 0, \quad 8 \leq k \leq 12 \text{ のとき } g(k) < 0$$

$$\text{ゆえに } p(3) < p(4) < \cdots < p(6) < p(7) > p(8) > \cdots > p(12)$$

よって、 $p(k)$ を最大にする k の値は $k = 7$

■

5 (1) $A = \begin{pmatrix} -2a^2 & a \\ 2a^3 & -3a^2 \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (*)$$

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より } \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a^2 & a \\ 2a^3 & -3a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = -a^2 \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \text{ であるから, } (*) \text{ より, } n \geq 1 \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{n+1} - x_n \\ y_{n+1} - y_n \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x_n - x_{n-1} \\ y_n - y_{n-1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} \\ &= A^n \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = (-a^2)^n \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ y_{k+1} - y_k \end{pmatrix} &= \sum_{k=0}^{n-1} (-a^2)^k \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= \frac{1 - (-a^2)^n}{1 + a^2} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (**)$$

$$\text{よって } \mathbf{P}_n \left(\frac{1 - (-a^2)^n}{1 + a^2}, \frac{a\{1 - (-a^2)^n\}}{1 + a^2} \right)$$

(2) $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_1$ となるとき, $\textcircled{1}$ および $(**)$ から

$$\frac{1 - (-a^2)^n}{1 + a^2} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad (-a^2)^{n-1} = 1$$

$-a^2 = -1$, $n-1$ は偶数 すなわち $a = \pm 1$, n が奇数のとき $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_1$

このとき $a = \pm 1$, $\mathbf{P}_n \left(\frac{1 - (-1)^n}{2}, \frac{\pm\{1 - (-1)^n\}}{2} \right)$ (複号同順)

補足 n が奇数のとき $\mathbf{P}_n(1, \pm 1)$, n が偶数のとき $\mathbf{P}_n(0, 0)$ ■