

平成14年度 名古屋大学 2次試験前期日程(数学問題)90分
法・経済・文・教育・情報文化(社会システム情報)数I・II・A・B

- 法・文・教育・情報文化学部 [1] [2] 必答, [3] [4] より1題選択
- 経済学部 [1] [2] 必答, [4] [5] より1題選択

[1] n を自然数とすると、3つの数 $a = \sqrt[5]{1 + \frac{1}{n}} - 1$, $b = 1 - \sqrt[5]{1 - \frac{1}{n}}$, $c = \frac{1}{5n}$ の大きさを比較せよ。

[2] 次の様に円 C_n を定める。まず、 C_0 は $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円、 C_1 は $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円とする。次に C_0, C_1 に外接し x 軸に接する円を C_2 とする。さらに、 $n = 3, 4, 5, \dots$ に対し、順に、 C_0, C_{n-1} に外接し x 軸に接する円で C_{n-2} でないものを C_n とする。 C_n ($n \geq 1$) の中心の座標を (a_n, b_n) とするとき、次の問いに答えよ。ただし、2つの円が外接するとは、中心間の距離がそれぞれの円の半径の和に等しいことをいう。

(1) $n \geq 1$ に対し、 $b_n = \frac{a_n^2}{2}$ を示せ。

(2) a_n を求めよ。

[3] 辺 AB の長さがそれぞれ $AB = 10$, $BC = 6$, $AC = 8$ の $\triangle ABC$ がある。辺 AB 上に点 P , 辺 AC 上に点 Q を、 $\triangle APQ$ の面積が $\triangle ABC$ の面積の $\frac{1}{2}$ になるようにとる。

(1) 2辺の長さの和 $AP + AQ$ を u とおく。 $\triangle APQ$ の周の長さ ℓ を u を用いて表せ、

(2) ℓ が最小となるときの AP , AQ , ℓ の値を求めよ。

[4] O を原点とする座標平面上の曲線 $y = x^2$ 上の2点 A, B に対し、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = t$ とおく。

(1) t のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) $t = 2$ のとき、 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ となる点 P の軌跡を求め、図示せよ。

5 行列 $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ および列ベクトル $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
 $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = P^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\dots$ $\begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix} = P^m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\dots$ を考える.

(1) 点 $(1, 1)$ と点 (a_1, b_1) の距離 d_1 を求めよ.

(2) 平面上の2点 (x, y) , (z, w) 間の距離を s とする. 2点 $\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y\right)$,
 $\left(\frac{2}{3}z - \frac{1}{2}w, \frac{1}{2}z + \frac{2}{3}w\right)$ 間の距離 t を s を用いて表せ.

(3) 点 (a_{m-1}, b_{m-1}) と点 (a_m, b_m) の距離 d_m ($m = 2, 3, 4, \dots$) を求めよ.

解答例

1 5つの正数 $1 + \frac{1}{n}$, 1 , 1 , 1 , 1 の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{n} + 1 + 1 + 1 + 1 \right) &> \sqrt[5]{\left(1 + \frac{1}{n} \right) 1^4} \\ \frac{1}{5n} &> \sqrt[5]{1 + \frac{1}{n}} - 1 \end{aligned} \quad (*)$$

$n > 1$ のとき, 5つの正数 $1 - \frac{1}{n}$, 1 , 1 , 1 , 1 の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{n} + 1 + 1 + 1 + 1 \right) &> \sqrt[5]{\left(1 - \frac{1}{n} \right) 1^4} \\ 1 - \sqrt[5]{1 - \frac{1}{n}} &> \frac{1}{5n} \end{aligned} \quad (**)$$

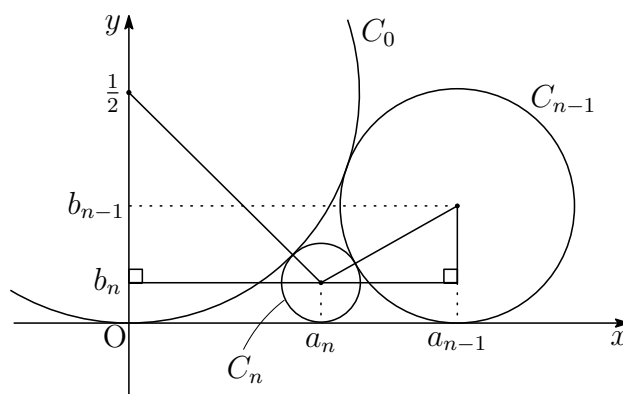
(**) は $n = 1$ のときも成立するから, (*), (**) より, 自然数 n について

$$1 - \sqrt[5]{1 - \frac{1}{n}} > \frac{1}{5n} > \sqrt[5]{1 + \frac{1}{n}} - 1 \quad \text{よって} \quad \mathbf{b > c > a}$$



2 (1) C_0 と C_n が外接するから

$$\left(\frac{1}{2} + b_n\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - b_n\right)^2 + a_n^2 \quad \text{ゆえに} \quad b_n = \frac{a_n^2}{2}$$



(2) C_{n-1} と C_n が外接するから

$$(b_{n-1} + b_n)^2 = (b_{n-1} - b_n)^2 + (a_{n-1} - a_n)^2$$

整理すると $4b_{n-1}b_n = (a_{n-1} - a_n)^2$

これに (1) の結果を代入すると

$$a_{n-1}^2 a_n^2 = (a_{n-1} - a_n)^2$$

$0 < a_n < a_{n-1}$ であるから

$$a_{n-1}a_n = a_{n-1} - a_n \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + 1 \quad (*)$$

C_1 の中心が $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ であるから $a_1 = 1$

(*) より, 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ は, 初項 1, 公差 1 の等差数列であるから

$$\frac{1}{a_n} = 1 + (n-1) \cdot 1 \quad \text{よって} \quad a_n = \frac{1}{n}$$

■

- 3** (1) $\triangle ABC$ は, $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形であるから

$$\sin A = \frac{3}{5}, \quad \cos A = \frac{4}{5}$$

$$\triangle ABC \text{ の面積は } \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$$

$\triangle APQ$ の面積は, $\triangle ABC$ の面積の $\frac{1}{2}$ より, $AP = x$, $AQ = y$ とおくと

$$\frac{1}{2}xy \sin A = \frac{1}{2}xy \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{2} \times 24 \quad \text{ゆえに} \quad xy = 40 \quad \cdots \textcircled{1}$$

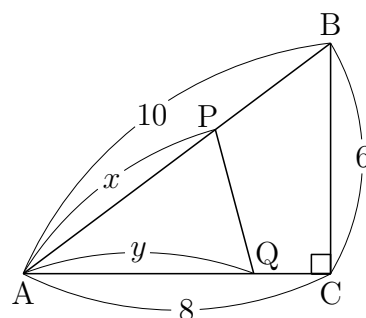
$\triangle APQ$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} PQ^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cos A \\ &= x^2 + y^2 - 2 \cdot 40 \cdot \frac{4}{5} \\ &= x^2 + y^2 - 64 \end{aligned}$$

$$x + y = u, \quad xy = 40 \text{ より}$$

$$PQ^2 = (x + y)^2 - 2xy - 64 = u^2 - 2 \cdot 40 - 64 = u^2 - 144$$

$$\text{よって} \quad \ell = x + y + PQ = u + \sqrt{u^2 - 144}$$



- (2) (1) の結果および $\textcircled{1}$ から

$$\begin{aligned} \ell &= x + y + \sqrt{(x + y)^2 - 144} \\ &= x + \frac{40}{x} + \sqrt{\left(x + \frac{40}{x}\right)^2 - 144} \end{aligned} \quad (*)$$

2つの正数 x , $\frac{40}{x}$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

$$x + \frac{40}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{40}{x}} = 4\sqrt{10} \quad (**)$$

上式において, 等号が成立するとき

$$x = \frac{40}{x} \quad \text{すなわち} \quad x = y = 2\sqrt{10}$$

$AB = 10$, $AC = 8$ より, $0 \leq x \leq 10$ かつ $0 \leq y \leq 8$ を満たす.

(*), (**) より, ℓ は, $AP = AQ = 2\sqrt{10}$ のとき, 最小値 $4\sqrt{10} + 4$ ■

- 4 (1) $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$ とおくと

$$t = ab + a^2b^2 = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \left(ab + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

よって, t のとり得る値の範囲は $t \geq -\frac{1}{4}$

- (2) $t = 2$ のとき $ab + a^2b^2 = 2$

$$(ab + 2)(ab - 1) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad ab = -2, 1$$

$(x, y) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ とおくと

$$x = a + b, \quad y = a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

- (i) $ab = -2$ のとき $y = x^2 + 4$

このとき, a, b を解とする 2 次方程式は $\lambda^2 - x\lambda - 2 = 0$

この方程式の判別式は

$$D = x^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = x^2 + 8 > 0$$

よって $y = x^2 + 4$

- (ii) $ab = 1$ のとき $y = x^2 - 2$

このとき, a, b を解とする 2 次方程式は $\lambda^2 - x\lambda + 1 = 0$

この方程式は実数解をもつから

$$D = x^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = x^2 - 4 \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad x \leq -2, 2 \leq x$$

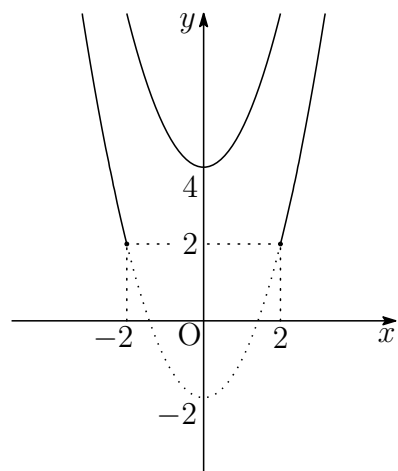
よって $y = x^2 - 2 \quad (x \leq -2, 2 \leq x)$

したがって, 点 P の軌跡の方程式は

$$y = x^2 + 4$$

$$y = x^2 - 2 \quad (x \leq -2, 2 \leq x)$$

点 P の軌跡は, 右の図のとおり.



注意 異なる 2 点であれば, (ii) において $x < -2, 2 < x$ となる. ■

5 (1) $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{pmatrix} a_1 - 1 \\ b_1 - 1 \end{pmatrix} = (P - E) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって $d_1 = \frac{1}{6} \sqrt{(-5)^2 + 1} = \frac{\sqrt{26}}{6}$

(2) 2点 $P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $P \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ について, $u = \begin{pmatrix} z - x \\ w - y \end{pmatrix}$, $v = Pu$ とおくと

$$s^2 = |u|^2 = {}^t u u, \quad t^2 = |v|^2 = {}^t (Pu) Pu = {}^t u {}^t P P u$$

${}^t P P = \frac{25}{36} E$ であるから

$$t^2 = \frac{25}{36} {}^t u u = \frac{25}{36} |u|^2 = \frac{25}{36} s^2 \quad \text{よって} \quad t = \frac{5}{6} s$$

(3) (2) の $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ をそれぞれ $\begin{pmatrix} a_{m-1} \\ b_{m-1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_m \\ b_m \end{pmatrix}$ に対応させることにより

$$d_m = \frac{5}{6} d_{m-1}$$

したがって, (1) の結果より

$$d_m = \frac{\sqrt{26}}{6} \left(\frac{5}{6} \right)^{m-1}$$

■