

平成24年度 京都大学 2次試験前期日程 (数学問題)150分
理, 医, 薬, 工, 農, 総合人間 (理系), 経済 (理系)

問題 1 2 3 4 5 6

1 次の各問に答えよ.

(1) a が正の実数のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ.

(2) 定積分 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2} \log \sqrt{1+x^2} dx$ の値を求めよ.

2 正四面体 $OABC$ において, 点 P, Q, R をそれぞれ辺 OA, OB, OC 上にとる. ただし P, Q, R は四面体 $OABC$ の頂点とは異なるとする. $\triangle PQR$ が正三角形ならば, 3辺 PQ, QR, RP はそれぞれ3辺 AB, BC, CA に平行であることを証明せよ.

3 実数 x, y が条件 $x^2 + xy + y^2 = 6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y$$

がとりうる値の範囲を求めよ.

4 (1) $\sqrt[3]{2}$ が無理数であることを証明せよ.

(2) $P(x)$ は有理数を係数とする x の多項式で, $P(\sqrt[3]{2}) = 0$ を満たしているとする. このとき $P(x)$ は $x^3 - 2$ で割り切れることを証明せよ.

5 次の命題 $(p), (q)$ のそれぞれについて, 正しいかどうかを答えよ. 正しい場合は証明し, 正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ.

(p) 正 n 角形の頂点から3点を選んで内角の1つが 60° である三角形を作ることができるならば, n は3の倍数である.

(q) $\triangle ABC$ と $\triangle ABD$ において, $AC < AD$ かつ $BC < BD$ ならば, $\angle C > \angle D$ である.

6 さいころを n 回投げて出た目を順に $X_1, X_2, \dots, X_n$ とする. さらに

$$Y_1 = X_1, \quad Y_k = X_k + \frac{1}{Y_{k-1}} \quad (k = 2, \dots, n)$$

によって $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ を定める.

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \leq Y_n \leq 1 + \sqrt{3}$$

となる確率 p_n を求めよ.

解答例

1 (1) $0 < a < 1$ のとき $1 < 1 + a^n < 2$ より $1 < (1 + a^n)^{\frac{1}{n}} < 2^{\frac{1}{n}}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$ であるから、はさみうちの原理により $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}} = 1$

$a \geq 1$ のとき $a^n < 1 + a^n < 2a^n$ より $a < (1 + a^n)^{\frac{1}{n}} < 2^{\frac{1}{n}}a$

$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}}a = a$ であるから、はさみうちの原理により $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}} = a$

よって $0 < a < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}} = 1,$

$a \geq 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}} = a$

別解 $0 < a < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n) = 1$ ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}} = 1$

$a = 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n) = 2$ ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}} = 1$

$1 < a$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a \left(\frac{1}{a^n} + 1 \right)^{\frac{1}{n}} = a$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2} \log \sqrt{1+x^2} dx &= - \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{x} \right)' \log \sqrt{1+x^2} dx \\
 &= - \left[\frac{1}{x} \log \sqrt{1+x^2} \right]_1^{\sqrt{3}} + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{1+x^2} dx \\
 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \log 2 + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}
 \end{aligned}$$

$$x = \tan \theta \text{ とおくと } \frac{1}{1+x^2} = \cos^2 \theta, \quad \frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \begin{array}{c|c|c} x & 1 & \rightarrow \sqrt{3} \\ \hline \theta & \frac{\pi}{4} & \rightarrow \frac{\pi}{3} \end{array}$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \left[\theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{12}$$

$$\text{よって } \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2} \log \sqrt{1+x^2} dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \log 2 + \frac{\pi}{12}$$

■

- 2 $p = OP$, $q = OQ$, $r = OR$ とおき, $\triangle OPQ$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} PQ^2 &= p^2 + q^2 - 2pq \cos 60^\circ \\ &= p^2 + q^2 - pq \end{aligned}$$

同様に, $\triangle OQR$, $\triangle ORP$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} QR^2 &= q^2 + r^2 - qr, \\ RP^2 &= r^2 + p^2 - rp \end{aligned}$$

$PQ = QR$ であるから

$$p^2 + q^2 - pq = q^2 + r^2 - qr \quad \text{ゆえに} \quad (p-r)(p-q+r) = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

また, $QR = RP$ であるから $(q-p)(q-r+p) = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$

①において, $r \neq p$ とすると, $q = p+r$ となり, これを ② に代入すると

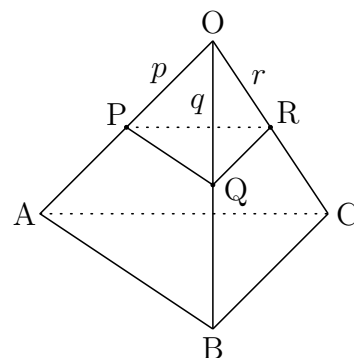
$$(p+r-p)(p+r-r+p) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad pr = 0$$

このとき, $p = 0$ または $r = 0$ となり, 不適. したがって $r = p$

$r = p$ を ② に代入すると $q(q-p) = 0$ すなわち $p = q$

$p = q = r$ であるから $OA : OP = OB : OQ = OC : OR$

よって, 3 辺 PQ , QR , RP はそれぞれ 3 辺 AB , BC , CA に平行である. ■



3 $x + y = t$ とおくと, 条件 $x^2 + xy + y^2 = 6$ より

$$xy = (x + y)^2 - (x^2 + xy + y^2) = t^2 - 6$$

x, y を解とする λ に関する 2 次方程式は

$$\lambda^2 - t\lambda + t^2 - 6 = 0$$

この方程式は, 実数解をもつから, 係数について

$$(-t)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (t^2 - 6) \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad t^2 - 8 \leq 0$$

$$\text{これを解いて} \quad -2\sqrt{2} \leq t \leq 2\sqrt{2}$$

したがって

$$\begin{aligned} x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y &= xy(x + y) - (x + y)^2 + (x + y) \\ &= (t^2 - 6)t - t^2 + t \\ &= t^3 - t^2 - 5t \end{aligned}$$

$f(t) = t^3 - t^2 - 5t$ ($-2\sqrt{2} \leq t \leq 2\sqrt{2}$) とおくと

$$f'(t) = 3t^2 - 2t - 5 = (t + 1)(3t - 5)$$

t	$-2\sqrt{2}$	$\dots$	-1	$\dots$	$\frac{5}{3}$	$\dots$	$2\sqrt{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$$f(-2\sqrt{2}) = -8 - 6\sqrt{2} = -8 - \sqrt{72} < -16$$

$$f(-1) = 3$$

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{175}{27} > -7$$

$$f(2\sqrt{2}) = -8 + 6\sqrt{2} = -8 + \sqrt{72} < 1$$

よって, 求める値 $f(t)$ のとりうる値は $-8 - 6\sqrt{2} \leq f(t) \leq 3$ ■

4 (1) $\sqrt[3]{2}$ を有理数と仮定し

$$\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q} \quad (p, q \text{ は互いに素である整数})$$

とする. この両辺を 3 乗し整理すると $p^3 = 2q^3$

整数 p は 2 を因数にもつから, $p = 2r$ とおくと (r は整数)

$$(2r)^3 = 2q^3 \quad \text{ゆえに} \quad q^3 = 4r^3$$

したがって, q も 2 を因数もち, p, q が互いに素であることに反し, 矛盾を生じる. よって, $\sqrt[3]{2}$ は無理数である.

別解 $\sqrt[3]{2}$ を有理数と仮定し

$$\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q} \quad (p, q \text{ は互いに素である整数})$$

とする. この両辺を 3 乗すると $2 = \frac{p^3}{q^3}$

上式の左辺は整数で, p, q は互いに素であるから

$$q^3 = 1 \quad \text{すなわち} \quad q = 1, p^3 = 2$$

$1^3 = 1, 2^3 = 8$ であるから, これを満たす整数 p は存在しない.

よって, $\sqrt[3]{2}$ は無理数である.

(2) $P(x)$ を $x^3 - 2$ で割った商を $Q(x)$, 余りを $ax^2 + bx + c$ とおくと

$$P(x) = (x^3 - 2)Q(x) + ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \text{ は有理数})$$

$\alpha = \sqrt[3]{2}$ とおくと, 条件から $P(\alpha) = 0$ であるから

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \cdots \textcircled{1} \quad \text{これに} \alpha \text{ を掛けると} \quad b\alpha^2 + c\alpha + 2a = 0$$

上の 2 式から $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c \\ 2a \end{pmatrix} \cdots (*)$ であるから

$$(ac - b^2) \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ 2a \end{pmatrix}$$

$ac - b^2 \neq 0$ とすると, α^2, α は有理数となるから, $ac - b^2 = 0$

これと (*) から c を消去すると

$$\begin{pmatrix} a^2b & ab^2 \\ a^2b & ab^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ \alpha \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b^3 \\ 2a^3 \end{pmatrix}$$

$b^3 = 2a^3$ を満たす有理数 a, b は $a = b = 0$ であり, $\textcircled{1}$ により $c = 0$

よって, 題意は成立する. ■

- 5 (p) 正 n 角形の頂点から 3 点を選んで作る最小の内角は $\frac{180^\circ}{n}$
したがって、正 n 角形の頂点から 3 点を選んで作る内角は

$$\frac{180^\circ}{n} \times k \quad (k \text{ は自然数})$$

条件を満たすとき $\frac{180^\circ}{n} \times k = 60^\circ$ ゆえに $n = 3k$

上式から、 n は 3 の倍数である。よって、本命題は真である。

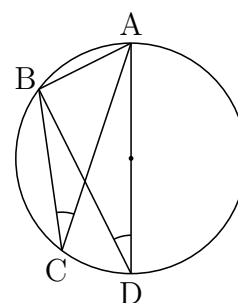
- (q) 右の図のように、AD を直径とする円周上に、
A, B, C, D をこの順に並んだ位置にとると

$$AC < AD \text{ かつ } BC < BD$$

一方、 $\angle C, \angle D$ は、 $\widehat{AB}$ の円周角であるから

$$\angle C = \angle D$$

よって、本命題は偽である。



6 $a = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $b = \sqrt{3}+1$ とおくと

$$\frac{1}{a} = b-2, \quad \frac{1}{b} = a-1, \quad a-1 < b-2 \quad \cdots (*)$$

n を自然数として

$$q_n = P(Y_n < a), \quad p_n = P(a \leq Y_n \leq b), \quad r_n = P(b < Y_n)$$

とおくと $q_n + p_n + r_n = 1 \quad \cdots (**)$

$Y_1 = X_1$ より, $1 < a < 2 < b < 3$ であるから

$$q_1 = \frac{1}{6}, \quad p_1 = \frac{1}{6}, \quad r_1 = \frac{4}{6}$$

(i) $Y_n < a$ のとき, $b-2 = \frac{1}{a} < \frac{1}{Y_n} \leq \frac{1}{X_n} \leq 1$ であるから, $(*)$ に注意して

$$X_{n+1} - 1 + a < X_{n+1} - 2 + b < X_{n+1} + \frac{1}{Y_n} \leq X_{n+1} + 1$$

$a \leq Y_{n+1} \leq b$ を満たすのは $X_{n+1} = 1$

(ii) $a \leq Y_n \leq b$ のとき, $a-1 = \frac{1}{b} \leq \frac{1}{Y_n} \leq \frac{1}{a} = b-2$ であるから

$$X_{n+1} - 1 + a \leq X_{n+1} + \frac{1}{Y_n} \leq X_{n+1} - 2 + b$$

$a \leq Y_{n+1} \leq b$ を満たすのは $X_{n+1} = 1, 2$

(iii) $b < Y_n$ のとき, $0 < \frac{1}{Y_n} < \frac{1}{b} = a-1$ であるから, $(*)$ に注意して

$$X_{n+1} < X_{n+1} + \frac{1}{Y_n} < X_{n+1} + a-1 < X_{n+1} + b-2$$

$a \leq Y_{n+1} \leq b$ を満たすのは $X_{n+1} = 2$

(i)~(iii) より $p_{n+1} = \frac{1}{6}q_n + \frac{2}{6}p_n + \frac{1}{6}r_n \quad (**)$ より $p_{n+1} = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{6}$

したがって $p_{n+1} - \frac{1}{5} = \frac{1}{6} \left(p_n - \frac{1}{5} \right)$ ゆえに $p_n - \frac{1}{5} = \left(\frac{1}{6} \right)^{n-1} \left(p_1 - \frac{1}{5} \right)$

$p_1 = \frac{1}{6}$ であるから $p_n = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{6^n} \right)$ ■