

平成23年度 京都大学 2次試験前期日程 (数学問題)150分
理, 医, 薬, 工, 農, 総合人間 (理系), 経済 (理系)

問題 1 2 3 4 5 6

1 次の各問に答えよ.

- (1) 箱の中に, 1 から 9 までの番号を 1 つずつ書いた 9 枚のカードが入っている. ただし, 異なるカードには異なる番号が書かれているものとする. この箱から 2 枚のカードを同時に選び, 小さいほうの数を X とする. これらのカードを箱に戻して, 再び 2 枚のカードを同時に選び, 小さいほうの数を Y とする. $X = Y$ である確率を求めよ.

- (2) 定積分 $\int_0^{\frac{1}{2}} (x+1)\sqrt{1-2x^2} dx$ を求めよ.

2 a, b, c を実数とし, O を原点とする座標平面上において, 行列 $\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}$ によって表される 1 次変換を T とする. この 1 次変換 T が 2 つの条件

- (i) 点 $(1, 2)$ を点 $(1, 2)$ に移す
(ii) 点 $(1, 0)$ と点 $(0, 1)$ が T によって点 A, B にそれぞれ移るとき, $\triangle OAB$ の面積が $\frac{1}{2}$ である

を満たすとき, a, b, c を求めよ.

3 xy 平面上で, $y = x$ のグラフと $y = \left| \frac{3}{4}x^2 - 3 \right| - 2$ のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ.

4 n は 2 以上の整数であり, $\frac{1}{2} < a_j < 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$) であるとき, 不等式

$$(1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n) > 1 - \left(a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{2^{n-1}} \right)$$

が成立することを示せ.

5 xyz 空間で, 原点 O を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の球面 S と 3 点 $(4, 0, 0), (0, 4, 0), (0, 0, 4)$ を通る平面 α が共有点を持つことを示し, 点 (x, y, z) がその共有点全体の集合を動くとき, 積 xyz が取り得る値の範囲を求めよ.

6 空間内に四面体 $ABCD$ を考える. このとき, 4 つの頂点 A, B, C, D を同時に通る球面が存在することを示せ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad 1 \leq k \leq 8 \text{ とすると } P(X \geq k) = \frac{{}_{9-k+1}C_2}{{}_9C_2} = \frac{{}_{10-k}C_2}{{}_9C_2} = \frac{(10-k)(9-k)}{72}$$

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(X \geq k) - P(X \geq k+1) \\ &= \frac{(10-k)(9-k)}{72} - \frac{(9-k)(8-k)}{72} = \frac{9-k}{36} \end{aligned}$$

したがって、 $X = Y$ である確率は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 \left(\frac{9-k}{36} \right)^2 &= \frac{1}{36^2} \sum_{k=1}^8 (9-k)^2 = \frac{1}{36^2} \sum_{k=1}^8 k^2 \\ &= \frac{1}{36^2} \cdot \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 17 = \frac{17}{108} \end{aligned}$$

別解 9枚のカードから2枚を同時に選ぶ総数は ${}_9C_2 = 36$ (通り)

小さいほうの数を k とすると ($1 \leq k \leq 8$)、大きいほうの数は $k+1$ から 9 までの $9-k$ 通りあるから

$$P(X = k) = \frac{9-k}{36}$$

$$(2) \quad \int_0^{\frac{1}{2}} (x+1)\sqrt{1-2x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x\sqrt{1-2x^2} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-2x^2} dx$$

$$\text{ここで } \int_0^{\frac{1}{2}} x\sqrt{1-2x^2} dx = -\frac{1}{6} \left[(1-2x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{2}}{24},$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-2x^2} dx &= \sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} - x^2} dx \\ &= \sqrt{2} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{16} + \frac{\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \int_0^{\frac{1}{2}} (x+1)\sqrt{1-2x^2} dx &= \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{2}}{24} + \frac{\sqrt{2}\pi}{16} + \frac{\sqrt{2}}{8} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{2}\pi}{16} \end{aligned}$$

注意 $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} - x^2} dx$ は、 $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}$, $y \geq 0$

2 条件 (i) より

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad (*) \begin{cases} a = -1 \\ b + 2c = 2 \end{cases}$$

条件 (ii) より

$$\det \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \pm 1 \quad \text{ゆえに} \quad ac - b = \pm 1$$

$a = -1$ を代入して $-b - c = \pm 1$

これと (*) の第 2 式を連立すると $(b, c) = (-4, 3), (0, 1)$

よって $(a, b, c) = (-1, -4, 3), (-1, 0, 1)$ ■

3 $\ell: y = x + 2$ のグラフと $C: y = \left| \frac{3}{4}x^2 - 3 \right|$ のグラフによって囲まれる図形の面積を求めればよい.
 ℓ と C の方程式から y を消去すると

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{4}x^2 - 3 \right| &= x + 2 \\ |(x+2)(x-2)| &= \frac{4}{3}(x+2) \\ x+2 &= 0, \quad x-2 = \pm \frac{4}{3} \end{aligned}$$

ℓ と C の交点の x 座標は $x = -2, \frac{2}{3}, \frac{10}{3}$

$-2 \leq x \leq \frac{2}{3}$ で ℓ と C で囲まれた図形の面積を S_1 とすると

$$S_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \left(\frac{2}{3} + 2 \right)^3 = \frac{64}{27}$$

C と x 軸で囲まれる図形の面積を S_2 とすると

$$S_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} (2+2)^3 = 8$$

求める面積は図の斜線部分で、その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \left(\frac{10}{3} + 2 \right)^3 + S_1 - (S_2 - S_1) - S_2 \\ &= \frac{512}{27} + 2S_1 - 2S_2 = \frac{512}{27} + 2 \cdot \frac{64}{27} -$$

4 n は 2 以上の整数で, $\frac{1}{2} < a_j < 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$) であるとき

$$\prod_{k=1}^n (1 - a_k) > 1 - \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2^{k-1}} \quad \dots (*)$$

とおく.

[1] $n = 2$ のとき

$$(1 - a_1)(1 - a_2) - \left\{ 1 - \left(a_1 + \frac{a_2}{2} \right) \right\} = a_2 \left(a_1 - \frac{1}{2} \right) > 0$$

よって, $n = 2$ のとき, $(*)$ が成立する.

[2] $n = m$ のとき, $(*)$ が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{m+1} (1 - a_k) &> (1 - a_{m+1}) \left(1 - \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{2^{k-1}} \right) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{2^{k-1}} - \left(1 - \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{2^{k-1}} \right) a_{m+1} \end{aligned}$$

ここで, $\sum_{k=1}^m \frac{a_k}{2^{k-1}} > \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{2^{k-1}} = 1 - \frac{1}{2^m}$ であるから

$$- \left(1 - \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{2^{k-1}} \right) > -\frac{1}{2^m}$$

$$\text{したがって} \quad \prod_{k=1}^{m+1} (1 - a_k) > 1 - \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{2^{k-1}} - \frac{a_{m+1}}{2^m} = 1 - \sum_{k=1}^{m+1} \frac{a_k}{2^{k-1}}$$

よって, $n = m + 1$ のときも $(*)$ が成立する.

[1], [2] より, 2 以上の自然数 n について, $(*)$ が成立する. ■

5 原点 O を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の球面 S の方程式は

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6$$

3 点 $(4, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$, $(0, 0, 4)$ を通る平面 α の方程式は

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1 \quad \text{すなわち} \quad x + y + z = 4$$

原点 O から平面 α までの距離 d は

$$d = \frac{4}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

S の半径 r は $r = \sqrt{6}$

$$r - d = \sqrt{6} - \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{18} - 4}{\sqrt{3}} > 0 \quad \text{ゆえに} \quad d < r$$

よって, S と α は共有点をもつ.

S と α の方程式から

$$\begin{aligned} x + y &= 4 - z, \\ 2xy &= (x + y)^2 - (x^2 + y^2) \\ &= (4 - z)^2 - (6 - z^2) = 2z^2 - 8z + 10 \end{aligned}$$

$x + y = 4 - z$, $xy = z^2 - 4z + 5$ より, x, y を解とする t に関する 2 次方程式は

$$t^2 - (4 - z)t + z^2 - 4z + 5 = 0$$

この方程式は実数解をもつから, 係数について

$$(4 - z)^2 - 4 \cdot 1(z^2 - 4z + 5) \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (3z - 2)(z - 2) \leq 0$$

z の取り得る値の範囲は, これを解いて $\frac{2}{3} \leq z \leq 2$

$f(z) = xyz = (z^2 - 4z + 5)z$ $\left(\frac{2}{3} \leq z \leq 2\right)$ とおくと

$f(z) = z^3 - 4z^2 + 5z$ より $f'(z) = 3z^2 - 8z + 5 = (z - 1)(3z - 5)$

z

- 6 $\triangle ABC$ の外心を O とし, O を通り平面 ABC に垂直な直線を ℓ とし, ℓ の方向ベクトルを $\vec{n}$ とする. また, $\vec{d} = \overrightarrow{AD}$ とし, 線分 AD の垂直二等分面を α とすると, D は平面 ABC 上の点ではないから

$$\vec{d} \cdot \vec{n} \neq 0$$

したがって, ℓ と α の交点が唯一存在し, これを P とする.

P は ℓ 上の点であるから $AP = BP = CP$

P は α 上の点であるから $AP = DP$

$AP = BP = CP = DP$ となるから, 4つの頂点 A, B, C, D を同時に通る P を中心とする球面が存在する. ■