

平成21年度 京都大学 2次試験前期日程(数学問題)150分
理, 医, 薬, 工, 農, 総合人間(理系), 経済(理系)

- 理・医[医学科]・薬, 工, 農, 総合人間(理系), 経済(理系) [1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#)
数I・II・III・A・B・C (150分)
- 医[人間健康科学科]・教育(理系) [7](#) [8](#) [9](#) [10](#) [11](#) [12](#)
数I・II・III・A・B・C (150分)

[1](#) xyz 空間で $O(0, 0, 0)$, $A(3, 0, 0)$, $B(3, 2, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $D(0, 0, 4)$, $E(3, 0, 4)$, $F(3, 2, 4)$, $G(0, 2, 4)$ を頂点とする直方体 $OABC-DEFG$ を考える. 辺 AE を $s:1-s$ に内分する点を P , 辺 CG を $t:1-t$ に内分する点を Q とおく. ただし $0 < s < 1$, $0 < t < 1$ とする. D を通り, O, P, Q を含む平面に垂直な直線が線分 AC (両端を含む) と交わるような s, t のみたす条件を求めよ.

[2](#) 平面上の鋭角三角形 $\triangle ABC$ の内部 (辺や頂点は含まない) に点 P をとり, A' を B, C, P を通る円の中心, B' を C, A, P を通る円の中心, C' を A, B, P を通る円の中心とする. このとき A, B, C, A', B', C' が同一円周上にあるための必要十分条件は P が $\triangle ABC$ の内心に一致することであることを示せ.

[3](#) n 枚のカードを積んだ山があり, 各カードには上から順番に 1 から n まで番号がつけられている. ただし $n \geq 2$ とする. このカードの山に対して次の試行を繰り返す. 1回の試行では, 一番上のカードを取り, 山の一番上にもどすか, あるいはいずれかのカードの下に入れるという操作を行う. これら n 通りの操作はすべて同じ確率であるとする. n 回の試行を終えたとき, 最初一番下にあったカード (番号 n) が山の一番上にきている確率を求めよ.

[4](#) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を $ad - bc = 1$ をみたす行列とする (a, b, c, d は実数). 自然数 n に対して平面上の点 $P_n(x_n, y_n)$ を

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

により定める. $\overrightarrow{OP_1}$ と $\overrightarrow{OP_2}$ の長さが 1 のとき, すべての n に対して $\overrightarrow{OP_n}$ の長さが 1 であることを示せ. ここでは O は原点である.

[5](#) xy 平面上で原点を極, x 軸の正の部分が始線とする極座標に関して, 極方程式 $r = 2 + \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) により表される曲線を C とする. C と x 軸とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ.

- 6** a と b を互いに素, すなわち 1 以外の公約数を持たない正の整数とし, さらに a は奇数とする. 正の整数 n に対して整数 a_n, b_n を $(a + b\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ をみたすように定めるとき, 次の (1), (2) を示せ. ただし $\sqrt{2}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい.

- (1) a_2 は奇数であり, a_2 と b_2 は互いに素である.
 (2) すべての n に対して, a_n は奇数であり, a_n と b_n は互いに素である.

- 7** 次の各問にそれぞれ答えよ.

- (1) 正の数 a に対して xyz 空間で $O(0, 0, 0)$, $A(3, 0, 0)$, $B(3, 2, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $D(0, 0, a)$, $E(3, 0, a)$, $F(3, 2, a)$, $G(0, 2, a)$ を頂点とする直方体 $OABC-DEFG$ を考える. D を通り, 3 つの頂点 O, E, G を含む平面に垂直な直線が辺 BC (両端を含む) と点 P で交わるとき, a の値と P の座標を求めよ.
- (2) 白球と赤球の入った袋から 2 個の球を同時に取り出すゲームを考える. 取り出した 2 球がともに白球ならば「成功」でゲームを終了し, そうでないときは「失敗」とし, 取り出した 2 球に赤球を 1 個加えた 3 個の球を袋にもどしてゲームを続けるものとする. 最初に白球が 2 個, 赤球が 1 個袋に入っていたとき, $n - 1$ 回まで失敗し n 回目に成功する確率を求めよ. ただし $n \geq 2$ とする.

- 8** 平面上に三角形 $\triangle OA_1A_2$ と点 A_3, A_4, A_5 を, $n = 1, 2, 3$ に対して $\triangle OA_nA_{n+1}$ と $\triangle OA_{n+1}A_{n+2}$ が辺 OA_{n+1} に関して対称になるようにとる. $\triangle OA_2A_5$ の面積が $\triangle OA_1A_2$ の面積の正の整数倍となるとき, $\angle A_1OA_2$ の値を求めよ.

- 9** x, y は $x \neq 1, y \neq 1$ をみたす正の数で, 不等式

$$\log_x y + \log_y x > 2 + (\log_x 2)(\log_y 2)$$

をみたすとする. このとき x, y の組 (x, y) の範囲を座標平面上に図示せよ.

- 10** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を $ad - bc = 1$ をみたす行列 (a, b, c, d は実数) とし, 正の整数 n に対して

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

により x_n, y_n を定める. $x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2 = 1$ ならばすべての n に対して $x_n^2 + y_n^2 = 1$ であることを示せ.

- 11** p を素数, n を正の整数とすると, $(p^n)!$ は p で何回割り切れるか.

- 12** 極方程式 $r = 1 + \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) で表される曲線の長さを求めよ.

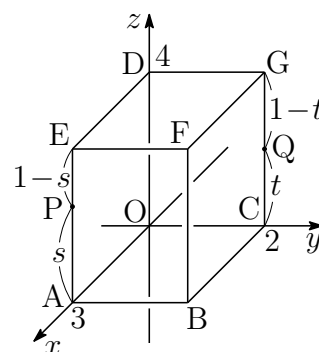
解答例

1 P は辺 AE を $s : 1 - s$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AE} \\ &= (3, 0, 0) + s(0, 0, 4) = (3, 0, 4s)\end{aligned}$$

Q は辺 CG を $t : 1 - t$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{CG} \\ &= (0, 2, 0) + t(0, 0, 4) = (0, 2, 4t)\end{aligned}$$



2つのベクトル $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ に垂直なベクトルの1つは $\vec{n} = (4s, 6t, -3)$

D(0, 0, 4) を通り, $\vec{n}$ に平行な直線 ℓ のベクトル方程式は

$$(x, y, z) = (0, 0, 4) + k(4s, 6t, -3) \quad (k \text{ は媒介変数})$$

ℓ が直線 AC と交点をもつとき, $z = 0$ により

$$k = \frac{4}{3} \quad \text{ゆえに} \quad (x, y, z) = \left(\frac{16s}{3}, 8t, 0\right)$$

この交点を R とすると $\overrightarrow{OR} = \frac{16s}{9}\overrightarrow{OA} + 4t\overrightarrow{OC}$

R は線分 AC 上の点であるから

$$\frac{16s}{9} + 4t = 1, \quad 0 \leq \frac{16s}{9} \leq 1, \quad 0 \leq 4t \leq 1$$

このとき, $0 < s < 1$, $0 < t < 1$ に注意すると

$$\frac{16s}{9} + 4t = 1, \quad 0 < t < \frac{1}{4} \left(0 < s < \frac{9}{16} \text{ でもよい} \right)$$

別解 $\overrightarrow{OR} = (1 - u)\overrightarrow{OA} + u\overrightarrow{OB} = (3 - 3u, 2u, 0) \quad (0 \leq u \leq 1)$

ゆえに $\overrightarrow{DR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OD} = (3 - 3u, 2u, -4)$

$\overrightarrow{DR}$ は $\overrightarrow{OP} = (3, 0, 4s)$ と $\overrightarrow{OQ} = (0, 2, 4t)$ に垂直であるから

$$3(3 - 3u) + 4s(-4) = 0, \quad 2 \cdot 2u + (-4) \cdot 4t = 0$$

したがって $\frac{16s}{9} + u = 1, \quad u = 4t$

s, t, u の値の範囲に注意して $\frac{16s}{9} + 4t = 1, \quad 0 < t < \frac{1}{4}$



2 (必要性) $\triangle ABC$ の外接円を S とする.

C' , A' が S 上にあるとき, $C'A = C'B$, $A'B = A'C$ より, 円周角の定理から

$$\angle C'AB = \angle C'BA = \angle C'A'B = x, \quad \angle A'BC = \angle A'CB = \angle A'C'B = y$$

とおく. M を線分 BP の中点とする. C' は $\triangle ABP$ の外心なので $C'B = C'P$ であり, A' は $\triangle BCP$ の外心なので $A'B = A'P$ である.

したがって, 二等辺三角形の性質により, それぞれの外心から中点 M へ結んだ直線は底辺と垂直に交わる.

$$\angle BMC' = \angle BMA' = 90^\circ$$

これにより, 3点 C' , M , A' は直線 BP に垂直な同一直線上に並ぶ.

直角三角形 $\triangle BMC'$ と $\triangle BMA'$ に着目すると

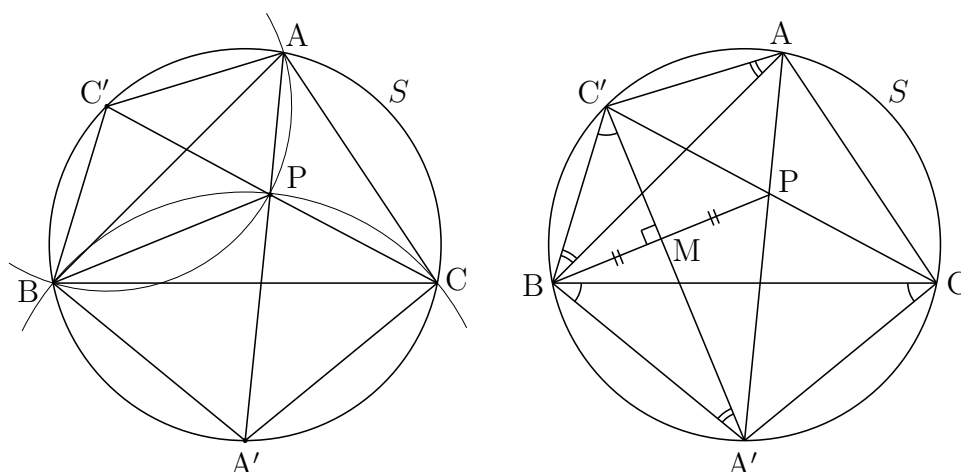
$$\begin{aligned} \angle MBC' &= 90^\circ - y, & \angle MBA' &= 90^\circ - x, \\ \angle MBA &= \angle MBC' - \angle C'BA = (90^\circ - y) - x, \\ \angle MBC &= \angle MBA' - \angle A'BC = (90^\circ - x) - y \end{aligned}$$

したがって $\angle MBA = \angle MBC = 90^\circ - (x + y)$

すなわち, BP は $\angle ABP$ の二等分線である.

同様に, CP , AP はそれぞれ $\angle BCA$, $\angle CAB$ の二等分線である.

以上より, 3本の角の二等分線の交点であるから, P は $\triangle ABC$ の内心である.

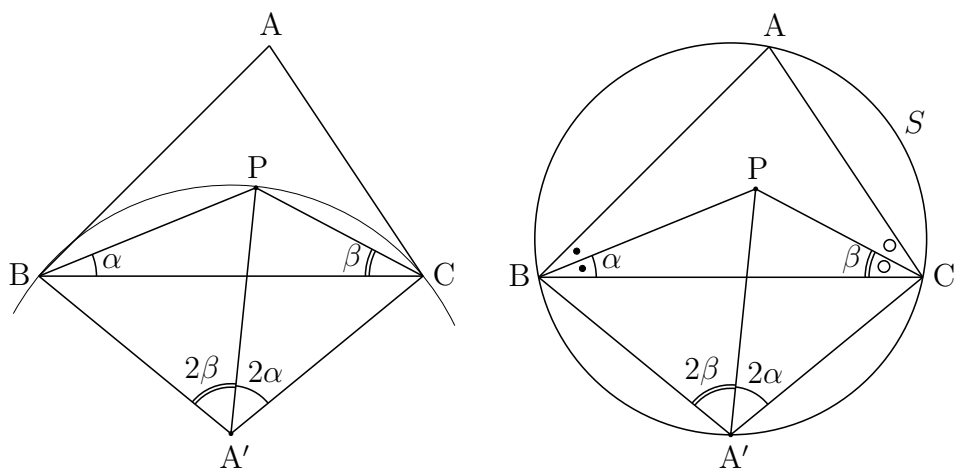


(十分性) $\angle PBC = \alpha$, $\angle PCB = \beta$ とすると $\angle PA'C = 2\alpha$, $\angle PA'B = 2\beta$

$\triangle ABC$ において $\angle CAB = 180^\circ - (2\alpha + 2\beta)$

$\angle BAC + \angle BA'C = 180^\circ$ であるから, A' は S 上にある.

同様に, B' , C' も S 上にある.



3 番号 n のカードが一番上にくるには、少なくとも $n-1$ 回の試行が必要であり、次の (i), (ii) の場合がある.

- (i) $n-1$ 回目までのすべての試行において取ったカードを番号 n のカードより下側に入れ、 n 回目の試行で山の一番上にある番号 n のカードを山の一番上にもどすときで、その確率は

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{(n-1)!}{n^n}$$

- (ii) k 回目の試行 ($1 \leq k \leq n-1$) で取ったカードを番号 n のカードの上側に入れ、これ以外の試行においては取ったカードを番号 n のカードの下側入れるときで、その確率は

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{k-1}{n} \cdot \overset{(k \text{ 回目})}{\frac{n-k}{n}} \cdot \frac{k}{n} \cdots \frac{n-1}{n} = \frac{(n-1)!(n-k)}{n^n}$$

(i), (ii) より、求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)!}{n^n} \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \right) &= \frac{(n-1)!}{n^n} \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} k \right) \\ &= \frac{(n-1)!}{n^n} \left(1 + \frac{1}{2}n(n-1) \right) \\ &= \frac{(n-1)!}{n^n} \cdot \frac{n^2 - n + 2}{2} \end{aligned}$$

■

$$\boxed{4} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1 \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc \\ c(a + d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(a + d) - 1 \\ c(a + d) \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{\text{OP}}_1|^2 = 1, \quad |\overrightarrow{\text{OP}}_2|^2 = 1 \text{ であるから, } x_1^2 + y_1^2 = 1, \quad x_2^2 + y_2^2 = 1 \text{ より}$$

$$(*) \quad \begin{cases} a^2 + c^2 = 1, \\ \{a(a + d) - 1\}^2 + c^2(a + d)^2 = 1 \end{cases}$$

$$(*) \text{ の第 2 式から } (a^2 + c^2)(a + d)^2 - 2a(a + d) = 0$$

$$\text{これに } (*) \text{ の第 1 式を代入して } (a + d)(d - a) = 0$$

$$(i) \quad a + d = 0 \text{ のとき, } \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^{n-2} A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -A^{n-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad d - a = 0 \text{ のとき, } d = a \text{ を } ad - bc = 1 \text{ に代入すると}$$

$$a^2 - bc = 1$$

$$\text{これと } (*) \text{ の第 1 式から } c(b + c) = 0$$

$$\underline{c = 0 \text{ のとき}}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^{n-2} A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^{n-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{b + c = 0 \text{ のとき}}, \quad a = \cos \theta, \quad c = \sin \theta \text{ とおくと } A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

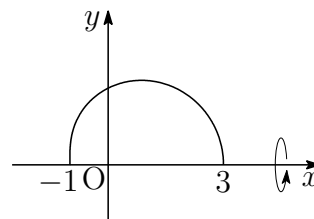
$$|\overrightarrow{\text{OP}}_1| = |\overrightarrow{\text{OP}}_2| = 1 \text{ であるから, (i), (ii) より, すべての } n \text{ に対して } |\overrightarrow{\text{OP}}_n| = 1$$

■

5 $r = 2 + \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) より

$$x = r \cos \theta = (2 + \cos \theta) \cos \theta$$

$\theta = 0$ のとき $x = 3$, $\theta = \pi$ のとき $x = -1$



求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^3 y^2 dx = \pi \int_{\pi}^0 r^2 \sin^2 \theta (r' \cos \theta - r \sin \theta) d\theta \\ &= -\frac{\pi}{3} \int_0^{\pi} (r^3)' \sin^2 \theta \cos \theta d\theta + \pi \int_0^{\pi} r^3 \sin^3 \theta d\theta \\ &= -\frac{\pi}{3} \left[r^3 \sin^2 \theta \cos \theta \right]_0^{\pi} + \frac{\pi}{3} \int_0^{\pi} r^3 (2 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta) d\theta + \pi \int_0^{\pi} r^3 \sin^3 \theta d\theta \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} r^3 \sin \theta d\theta \\ &= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} (2 + \cos \theta)^3 \sin \theta d\theta = \frac{2\pi}{3} \left[-\frac{1}{4} (2 + \cos \theta)^4 \right]_0^{\pi} = \frac{40\pi}{3} \end{aligned}$$

極方程式による回転体の体積

x 軸の周りの回転体の体積 V

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin \theta d\theta \quad (0 \leq \alpha < \beta \leq \pi)$$

y 軸の周りの回転体の体積 V

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3 \cos \theta d\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \beta \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

証明 神戸大学理系 2016 年 **5** を参照¹

■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/N/KBdai/KBdai_ri_2016.pdf

6 (1) $a_2 + b_2\sqrt{2} = (a + b\sqrt{2})^2 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}$ より

$$(*) \begin{cases} a_2 = a^2 + 2b^2 \\ b_2 = 2ab \end{cases}$$

a は奇数であるから, a^2 は奇数である.

また, $2b^2$ は偶数であるから, a_2 は奇数である.

a_2, b_2 がともに素数 p で割り切れると仮定すると, p は奇素数であるから, $(*)$ の第 2 式より, 次の (i), (ii) の場合分けを行う.

(i) a が p で割り切れるとき, $(*)$ の第 1 式より

$$a_2 - a^2 = 2b^2$$

上式の左辺は, p で割り切れるから, $2b^2$ が p で割り切れる, すなわち, b は p で割り切れる. a と b は, ともに p を因数にもつから不適.

(ii) b が p で割り切れるとき, $(*)$ の第 1 式より

$$a_2 - 2b^2 = a^2$$

上式の左辺は, p で割り切れるから, a^2 が p で割り切れる, すなわち, a は p で割り切れる. a と b は, ともに p を因数にもつから不適.

(i), (ii) より, a_2, b_2 は互いに素である.

(2) $(a + b\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ より

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} &= (a + b\sqrt{2})(a_n + b_n\sqrt{2}) \\ &= (aa_n + 2bb_n) + (ba_n + ab_n)\sqrt{2} \end{aligned}$$

ゆえに $(**) \begin{cases} a_{n+1} = aa_n + 2bb_n \\ b_{n+1} = ba_n + ab_n \end{cases}$

$a_1 = a$ であるから (a は奇数), $(**)$ の第 1 式より, a_n が奇数のとき, a_{n+1} も奇数である. よって, すべての自然数 n について, a_n は奇数.

$$A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ とおくと } \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

a_1 と b_1 は互いに素, a_2 と b_2 は互いに素である.

a_n と b_n は互いに素, a_{n+1} と b_{n+1} は互いに素,

a_{n+2} と b_{n+2} がともに奇素数 q を約数をもつと仮定する.

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\text{ゆえに } (a^2 - 2b^2) \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \end{pmatrix}$$

したがって、 $a^2 - 2b^2$ は q で割り切れる。

また、ハミルトン・ケリーの定理により $A^2 + (a^2 - 2b^2)E = 2aA$

$$\text{ゆえに } \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \end{pmatrix} + (a^2 - 2b^2) \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = 2a \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$$

$2aa_{n+1}$, $2ab_{n+1}$ はともに q で割り切れる。 a_{n+1} と b_{n+1} は互いに素であるから、 a は q で割り切れる。このとき、 $a^2 - 2b^2$ も q で割り切れるから、 a と b はともに q で割り切れる。このことは、 a と b が互いに素であることに反するので不適。よって、すべての自然数 n に対して a_n と b_n は互いに素である。

別解 $m = 2^l$ のとき ($l = 0, 1, 2, \dots$), a_m と b_m が互いに素 $\dots$ (A)

(1) の結果から、 $l = 0, 1$ のとき (A) は成立する。また

$$\begin{aligned} a_{2m} + b_{2m}\sqrt{2} &= (a + b\sqrt{2})^{2m} = \{(a + b\sqrt{2})^m\}^2 \\ &= (a_m + b_m\sqrt{2})^2 = (a_m^2 + 2b_m^2) + 2a_mb_m\sqrt{2} \end{aligned}$$

(1) と同様の議論により、 a_m と b_m が互いに素であるとき、 a_{2m} と b_{2m} は互いに素である。したがって、(A) は成立する。

一方、ある自然数 N で a_N と b_N が互いに素でないと仮定すると、(**) より、 $n \geq N$ のとき、 a_n と b_n は互いに素でない。 $\dots$ (B)

(B) は (A) と矛盾するから、すべての自然数 n に対して、 a_n と b_n は互いに素である。 ■

- 7 (1) $\overrightarrow{OE} = (3, 0, a)$, $\overrightarrow{OG} = (0, 2, a)$
 $P(t, 2, 0)$ とおくと $(0 \leq t \leq 3)$

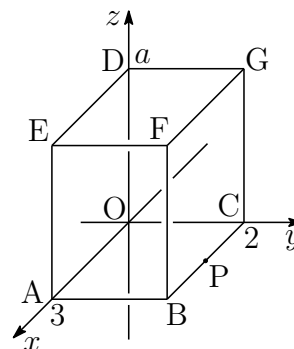
$$\begin{aligned}\overrightarrow{DP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OD} \\ &= (t, 2, 0) - (0, 0, a) = (t, 2, -a)\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{DP} \perp \overrightarrow{OE}, \quad \overrightarrow{DP} \perp \overrightarrow{OG} \text{ より}$$

$$\overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{OE} = 0, \quad \overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{OG} = 0$$

$$\text{したがって } 3t - a^2 = 0, \quad 4 - a^2 = 0$$

$$0 \leq t \leq 3 \text{ に注意してこれを解くと } a = 2, \quad t = \frac{4}{3}, \quad P\left(\frac{4}{3}, 2, 0\right)$$



- (2) k 回目の試行を行うとき ($k = 1, 2, \dots, n$), 袋の中には白球 2 個と赤球 k 個が入っているから, このとき「失敗」する確率は

$$1 - \frac{{}_2C_2}{{}_{k+2}C_2} = 1 - \frac{2}{(k+2)(k+1)} = \frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)}$$

n 回目の試行で成功する確率は

$$\frac{{}_2C_2}{{}_{n+2}C_2} = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$$

よって, 求める確率は

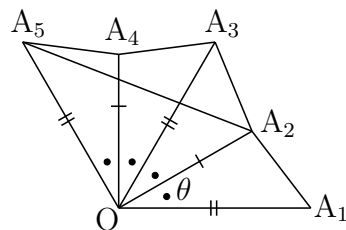
$$\begin{aligned}& \frac{2}{(n+2)(n+1)} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{2}{(n+2)(n+1)} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k+3}{k+2} \\ &= \frac{2}{(n+2)(n+1)} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n+2}{3} = \frac{2}{3n(n+1)}\end{aligned}$$

■

8 $\theta = \angle A_1OA_2$, $a = OA_1$, $b = OA_2$ とすると,
 $0 < \theta < \pi$ より

$$\triangle OA_1A_2 = \frac{1}{2}ab \sin \theta,$$

$$\triangle OA_2A_5 = \frac{1}{2}ab |\sin 3\theta|$$



$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$ であるから

$$\frac{\triangle OA_2A_5}{\triangle OA_1A_2} = \frac{|3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta|}{\sin \theta} = |3 - 4 \sin^2 \theta|$$

$0 < \theta < \pi$ より $-1 \leq 3 - 4 \sin^2 \theta < 3$ であるから, $\triangle OA_2A_5$ の面積が $\triangle OA_1A_2$ の面積の正の整数倍になるのは

$$3 - 4 \sin^2 \theta = -1 \text{ のとき } \sin \theta = 1 \quad \text{ゆえに } \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$3 - 4 \sin^2 \theta = 1 \text{ のとき } \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ゆえに } \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

$$3 - 4 \sin^2 \theta = 2 \text{ のとき } \sin \theta = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに } \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

よって $\angle A_1OA_2 = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$

■

9 $\log_x y + \log_y x > 2 + (\log_x 2)(\log_y 2)$ より

$$\frac{\log_2 y}{\log_2 x} + \frac{\log_2 x}{\log_2 y} > 2 + \frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 y}$$

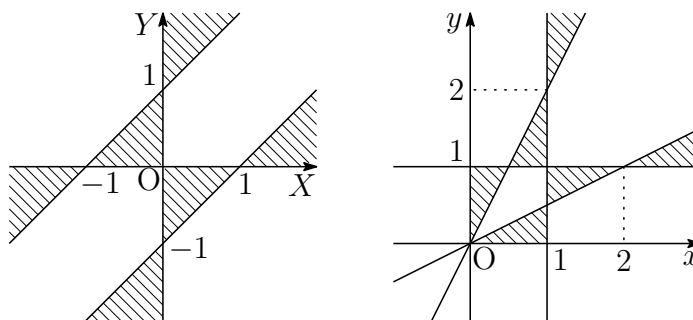
$X = \log_2 x$, $Y = \log_2 y$ とおくと

$$\frac{Y}{X} + \frac{X}{Y} > 2 + \frac{1}{XY} \quad \text{ゆえに} \quad XY(X - Y + 1)(X - Y - 1) > 0$$

したがって、左下の図の領域となる (境界線を含まない).

$X - Y + 1 = \log_2 \frac{2x}{y}$, $X - Y - 1 = \log_2 \frac{x}{2y}$ に注意すると、求める領域 (x, y) は右下の図の領域となる (境界線を含まない).

$$\log_2 x \log_2 y \log_2 \frac{2x}{y} \log_2 \frac{x}{2y} > 0$$



補足 (*) $\log_2 x \log_2 y \log_2 \frac{2x}{y} \log_2 \frac{x}{2y} > 0$ より $(x > 0, y > 0, x \neq 1, y \neq 1)$,

領域の境界線は

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad y = 1, \quad \frac{2x}{y} = 1, \quad \frac{x}{2y} = 1$$

たとえば、点 $(2, 2)$ は (*) を満たさない. 領域は、境界を挟み互い違いに定まる.



$$\boxed{10} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1 \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc \\ c(a + d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(a + d) - 1 \\ c(a + d) \end{pmatrix}$$

$$x_2^2 + y_2^2 = 1, \quad x_3^2 + y_3^2 = 1 \text{ より}$$

$$(*) \quad \begin{cases} a^2 + c^2 = 1, \\ \{a(a + d) - 1\}^2 + c^2(a + d)^2 = 1 \end{cases}$$

$$(*) \text{ の第 2 式から } (a^2 + c^2)(a + d)^2 - 2a(a + d) = 0$$

$$\text{これに } (*) \text{ の第 1 式を代入して } (a + d)(d - a) = 0$$

$$(i) \quad a + d = 0 \text{ のとき, } \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^{n-3} A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -A^{n-3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad d - a = 0 \text{ のとき, } d = a \text{ を } ad - bc = 1 \text{ に代入すると}$$

$$a^2 - bc = 1$$

$$\text{これと } (*) \text{ の第 1 式から } c(b + c) = 0$$

$$\underline{c = 0 \text{ のとき}}, \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^{n-3} A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A^{n-3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{b + c = 0 \text{ のとき}}, \quad a = \cos \theta, \quad c = \sin \theta \text{ とおくと } A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

$$x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2 = 1 \text{ であるから, (i), (ii) より, すべての } n \text{ に対して}$$

$$x_n^2 + y_n^2 = 1$$



11 $n \geq 2$ のとき, $(p^n)! = 1 \cdot 2 \cdots (p^n - 1)p^n$ より, p^n 個の自然数

$$1, 2, \dots, p^n - 1, p^n$$

について, p^k で割り切れるが, p^{k+1} で割り切れない個数は

$$\frac{p^n}{p^k} - \frac{p^n}{p^{k+1}} = p^{n-k} - p^{n-k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

p^n で割り切れるものが 1 個あるから, $(p^n)!$ が p で割り切れる回数を N とすると

$$\begin{aligned} N &= \sum_{k=1}^{n-1} k(p^{n-k} - p^{n-k-1}) + n \cdot 1 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \{kp^{n-k} - (k+1)p^{n-(k+1)}\} + \sum_{k=1}^{n-1} p^{n-k-1} + n \\ &= p^{n-1} - n + \sum_{k=1}^{n-1} p^{n-1-k} + n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} p^k = \frac{p^n - 1}{p - 1} \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき, $p!$ は p で割り切れる回数は 1 であるから, 上式は $n = 1$ のときも成立する. よって, $(p^n)!$ が p で割り切れる回数は

$$\frac{p^n - 1}{p - 1}$$

別解 p^n 個の自然数 $1, 2, \dots, p^n - 1, p^n$ について

p で割り切れる個数は $\frac{p^n}{p}$ 個あり, それらを p で 1 回ずつ割る

p^2 で割り切れる個数は $\frac{p^n}{p^2}$ 個あり, それらを p で 1 回ずつ割る

$\vdots$

p^k で割り切れる個数は $\frac{p^n}{p^k}$ 個あり, それらを p で 1 回ずつ割る

$\vdots$

p^n で割り切れる個数は 1 個あり, それを p で 1 回割る

よって, 求める回数は

$$\sum_{k=1}^n \frac{p^n}{p^k} = \sum_{k=1}^n p^{n-k} = \frac{p^n - 1}{p - 1}$$



12 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ より

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta$$

ゆえに
$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

$r = 1 + \cos \theta$ であるから

$$\begin{aligned} r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 &= (1 + \cos \theta)^2 + (-\sin \theta)^2 \\ &= 2(1 + \cos \theta) = 4 \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

よって、曲線 C の長さを l とすると

$$\begin{aligned} l &= \int_0^\pi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^\pi \sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta \\ &= \int_0^\pi 2 \cos \frac{\theta}{2} d\theta = \left[4 \sin \frac{\theta}{2} \right]_0^\pi = 4 \end{aligned}$$

補足 曲線 $r = a(1 + \cos \theta)$ は、カージオイド (cardioid) または心臓形という。

神戸大学理系 2016 年 **5** を参照²



²http://kumamoto.s12.xrea.com/N/KBdai/KBdai_ri_2016.pdf