

平成20年度 京都大学 2次試験前期日程 (数学問題)150分  
理, 医, 薬, 工, 農, 総合人間 (理系), 経済 (理系)

- 理・医 [医学科]・薬, 工, 農, 総合人間 (理系), 経済 (理系) 1 2 3 4 5 6  
数 I・II・III・A・B・C (150 分)
- 医 [人間健康科学科]・教育 (理系) 1 2 5 7 8 9  
数 I・II・III・A・B・C (150 分)

- 1 直線  $y = px + q$  が関数  $y = \log x$  のグラフと共有点を持たないために  $p$  と  $q$  が満たすべき必要十分条件を求めよ.
- 2 正四面体 ABCD を考える. 点 P は時刻 0 では頂点 A に位置し, 1 秒ごとにある頂点から他の 3 頂点のいずれかに, 等しい確率で動くとする. このとき, 時刻 0 から時刻  $n$  までの間に, 4 頂点 A, B, C, D のすべてに点 P が現れる確率を求めよ. ただし  $n$  は 1 以上の整数とする.
- 3 空間の 1 点 O を通る 4 直線で, どの 3 直線も同一平面上にないものを考える. このとき, 4 直線のいずれとも O 以外の点で交わる平面で, 4 つの交点が平行四辺形の頂点になるようなものが存在することを示せ.
- 4 定数  $a$  は実数であるとする. 関数  $y = |x^2 - 2|$  と  $y = |2x^2 + ax - 1|$  のグラフの共有点はいくつあるか.  $a$  の値によって分類せよ.
- 5 次の式で与えられる底面の半径が 2, 高さが 1 の円柱  $C$  を考える.

$$C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1\}$$

$xy$  平面上の直線  $y = 1$  を含み,  $xy$  平面と  $45^\circ$  の角をなす平面のうち, 点  $(0, 2, 1)$  を通るものを  $H$  とする. 円柱  $C$  を平面  $H$  で二つに分けると, 点  $(0, 2, 0)$  を含む方の体積を求めよ.

- 6 地球上の北緯  $60^\circ$  東経  $135^\circ$  の地点を A, 北緯  $60^\circ$  東経  $75^\circ$  の地点 B とする. A から B に向かう 2 種類の飛行経路  $R_1, R_2$  を考える.  $R_1$  は西に向かって同一緯度で飛ぶ経路とする.  $R_2$  は地球の大円に沿った経路のうち飛行距離の短い方とする.  $R_1$  に比べて  $R_2$  は飛行距離が 3% 以上短くなることを示せ. ただし地球は完全な球体であるとし, 飛行機は高度 0 を飛ぶものとする. また必要があれば, 三角関数表を用いよ.

注: 大円とは, 球を球の中心を通る平面で切ったとき, その切り口にできる円のことである.

## 三角関数表(1)

| $\theta$ | $\sin \theta$ | $\cos \theta$ | $\tan \theta$ | $\theta$ | $\sin \theta$ | $\cos \theta$ | $\tan \theta$ |
|----------|---------------|---------------|---------------|----------|---------------|---------------|---------------|
| 0.0°     | 0.0000        | 1.0000        | 0.0000        | 22.5°    | 0.3827        | 0.9239        | 0.4142        |
| 0.5°     | 0.0087        | 1.0000        | 0.0087        | 23.0°    | 0.3907        | 0.9205        | 0.4245        |
| 1.0°     | 0.0175        | 0.9998        | 0.0175        | 23.5°    | 0.3987        | 0.9171        | 0.4348        |
| 1.5°     | 0.0262        | 0.9997        | 0.0262        | 24.0°    | 0.4067        | 0.9135        | 0.4452        |
| 2.0°     | 0.0349        | 0.9994        | 0.0349        | 24.5°    | 0.4147        | 0.9100        | 0.4557        |
| 2.5°     | 0.0436        | 0.9990        | 0.0437        | 25.0°    | 0.4226        | 0.9063        | 0.4663        |
| 3.0°     | 0.0523        | 0.9986        | 0.0524        | 25.5°    | 0.4305        | 0.9026        | 0.4770        |
| 3.5°     | 0.0610        | 0.9981        | 0.0612        | 26.0°    | 0.4384        | 0.8988        | 0.4877        |
| 4.0°     | 0.0698        | 0.9976        | 0.0699        | 26.5°    | 0.4462        | 0.8949        | 0.4986        |
| 4.5°     | 0.0785        | 0.9969        | 0.0787        | 27.0°    | 0.4540        | 0.8910        | 0.5095        |
| 5.0°     | 0.0872        | 0.9962        | 0.0875        | 27.5°    | 0.4617        | 0.8870        | 0.5206        |
| 5.5°     | 0.0958        | 0.9954        | 0.0963        | 28.0°    | 0.4695        | 0.8829        | 0.5317        |
| 6.0°     | 0.1045        | 0.9945        | 0.1051        | 28.5°    | 0.4772        | 0.8788        | 0.5430        |
| 6.5°     | 0.1132        | 0.9936        | 0.1139        | 29.0°    | 0.4848        | 0.8746        | 0.5543        |
| 7.0°     | 0.1219        | 0.9925        | 0.1228        | 29.5°    | 0.4924        | 0.8704        | 0.5658        |
| 7.5°     | 0.1305        | 0.9914        | 0.1317        | 30.0°    | 0.5000        | 0.8660        | 0.5774        |
| 8.0°     | 0.1392        | 0.9903        | 0.1405        | 30.5°    | 0.5075        | 0.8616        | 0.5890        |
| 8.5°     | 0.1478        | 0.9890        | 0.1495        | 31.0°    | 0.5150        | 0.8572        | 0.6009        |
| 9.0°     | 0.1564        | 0.9877        | 0.1584        | 31.5°    | 0.5225        | 0.8526        | 0.6128        |
| 9.5°     | 0.1650        | 0.9863        | 0.1673        | 32.0°    | 0.5299        | 0.8480        | 0.6249        |
| 10.0°    | 0.1736        | 0.9848        | 0.1763        | 32.5°    | 0.5373        | 0.8434        | 0.6371        |
| 10.5°    | 0.1822        | 0.9833        | 0.1853        | 33.0°    | 0.5446        | 0.8387        | 0.6494        |
| 11.0°    | 0.1908        | 0.9816        | 0.1944        | 33.5°    | 0.5519        | 0.8339        | 0.6619        |
| 11.5°    | 0.1994        | 0.9799        | 0.2035        | 34.0°    | 0.5592        | 0.8290        | 0.6745        |
| 12.0°    | 0.2079        | 0.9781        | 0.2126        | 34.5°    | 0.5664        | 0.8241        | 0.6873        |
| 12.5°    | 0.2164        | 0.9763        | 0.2217        | 35.0°    | 0.5736        | 0.8192        | 0.7002        |
| 13.0°    | 0.2250        | 0.9744        | 0.2309        | 35.5°    | 0.5807        | 0.8141        | 0.7133        |
| 13.5°    | 0.2334        | 0.9724        | 0.2401        | 36.0°    | 0.5878        | 0.8090        | 0.7265        |
| 14.0°    | 0.2419        | 0.9703        | 0.2493        | 36.5°    | 0.5948        | 0.8039        | 0.7400        |
| 14.5°    | 0.2504        | 0.9681        | 0.2586        | 37.0°    | 0.6018        | 0.7986        | 0.7536        |
| 15.0°    | 0.2588        | 0.9659        | 0.2679        | 37.5°    | 0.6088        | 0.7934        | 0.7673        |
| 15.5°    | 0.2672        | 0.9636        | 0.2773        | 38.0°    | 0.6157        | 0.7880        | 0.7813        |
| 16.0°    | 0.2756        | 0.9613        | 0.2867        | 38.5°    | 0.6225        | 0.7826        | 0.7954        |
| 16.5°    | 0.2840        | 0.9588        | 0.2962        | 39.0°    | 0.6293        | 0.7771        | 0.8098        |
| 17.0°    | 0.2924        | 0.9563        | 0.3057        | 39.5°    | 0.6361        | 0.7716        | 0.8243        |
| 17.5°    | 0.3007        | 0.9537        | 0.3153        | 40.0°    | 0.6428        | 0.7660        | 0.8391        |
| 18.0°    | 0.3090        | 0.9511        | 0.3249        | 40.5°    | 0.6494        | 0.7604        | 0.8541        |
| 18.5°    | 0.3173        | 0.9483        | 0.3346        | 41.0°    | 0.6561        | 0.7547        | 0.8693        |
| 19.0°    | 0.3256        | 0.9455        | 0.3443        | 41.5°    | 0.6626        | 0.7490        | 0.8847        |
| 19.5°    | 0.3338        | 0.9426        | 0.3541        | 42.0°    | 0.6691        | 0.7431        | 0.9004        |
| 20.0°    | 0.3420        | 0.9397        | 0.3640        | 42.5°    | 0.6756        | 0.7373        | 0.9163        |
| 20.5°    | 0.3502        | 0.9367        | 0.3739        | 43.0°    | 0.6820        | 0.7314        | 0.9325        |
| 21.0°    | 0.3584        | 0.9336        | 0.3839        | 43.5°    | 0.6884        | 0.7254        | 0.9490        |
| 21.5°    | 0.3665        | 0.9304        | 0.3939        | 44.0°    | 0.6947        | 0.7193        | 0.9657        |
| 22.0°    | 0.3746        | 0.9272        | 0.4040        | 44.5°    | 0.7009        | 0.7133        | 0.9827        |
| 22.5°    | 0.3827        | 0.9239        | 0.4142        | 45.0°    | 0.7071        | 0.7071        | 1.0000        |

## 三角関数表 (2)

| $\theta$ | $\sin \theta$ | $\cos \theta$ | $\tan \theta$ | $\theta$ | $\sin \theta$ | $\cos \theta$ | $\tan \theta$ |
|----------|---------------|---------------|---------------|----------|---------------|---------------|---------------|
| 45.0°    | 0.7072        | 0.7072        | 1.0000        | 67.5°    | 0.9239        | 0.3827        | 2.4142        |
| 45.5°    | 0.7133        | 0.7009        | 1.0176        | 68.0°    | 0.9272        | 0.3746        | 2.4751        |
| 46.0°    | 0.7193        | 0.6947        | 1.0355        | 68.5°    | 0.9304        | 0.3665        | 2.5386        |
| 46.5°    | 0.7254        | 0.6884        | 1.0538        | 69.0°    | 0.9336        | 0.3584        | 2.6051        |
| 47.0°    | 0.7314        | 0.6820        | 1.0724        | 69.5°    | 0.9367        | 0.3502        | 2.6746        |
| 47.5°    | 0.7373        | 0.6756        | 1.0913        | 70.0°    | 0.9397        | 0.3420        | 2.7475        |
| 48.0°    | 0.7431        | 0.6691        | 1.1106        | 70.5°    | 0.9426        | 0.3338        | 2.8239        |
| 48.5°    | 0.7490        | 0.6626        | 1.1303        | 71.0°    | 0.9455        | 0.3256        | 2.9042        |
| 49.0°    | 0.7547        | 0.6561        | 1.1504        | 71.5°    | 0.9483        | 0.3173        | 2.9887        |
| 49.5°    | 0.7604        | 0.6494        | 1.1708        | 72.0°    | 0.9511        | 0.3090        | 3.0777        |
| 50.0°    | 0.7660        | 0.6428        | 1.1918        | 72.5°    | 0.9537        | 0.3007        | 3.1716        |
| 50.5°    | 0.7716        | 0.6361        | 1.2131        | 73.0°    | 0.9563        | 0.2924        | 3.2709        |
| 51.0°    | 0.7771        | 0.6293        | 1.2349        | 73.5°    | 0.9588        | 0.2840        | 3.3759        |
| 51.5°    | 0.7826        | 0.6225        | 1.2572        | 74.0°    | 0.9613        | 0.2756        | 3.4874        |
| 52.0°    | 0.7880        | 0.6157        | 1.2799        | 74.5°    | 0.9636        | 0.2672        | 3.6059        |
| 52.5°    | 0.7934        | 0.6088        | 1.3032        | 75.0°    | 0.9659        | 0.2588        | 3.7321        |
| 53.0°    | 0.7986        | 0.6018        | 1.3270        | 75.5°    | 0.9681        | 0.2504        | 3.8667        |
| 53.5°    | 0.8039        | 0.5948        | 1.3514        | 76.0°    | 0.9703        | 0.2419        | 4.0108        |
| 54.0°    | 0.8090        | 0.5878        | 1.3764        | 76.5°    | 0.9724        | 0.2334        | 4.1653        |
| 54.5°    | 0.8141        | 0.5807        | 1.4019        | 77.0°    | 0.9744        | 0.2250        | 4.3315        |
| 55.0°    | 0.8192        | 0.5736        | 1.4281        | 77.5°    | 0.9763        | 0.2164        | 4.5107        |
| 55.5°    | 0.8241        | 0.5664        | 1.4550        | 78.0°    | 0.9781        | 0.2079        | 4.7046        |
| 56.0°    | 0.8290        | 0.5592        | 1.4826        | 78.5°    | 0.9799        | 0.1994        | 4.9152        |
| 56.5°    | 0.8339        | 0.5519        | 1.5108        | 79.0°    | 0.9816        | 0.1908        | 5.1446        |
| 57.0°    | 0.8387        | 0.5446        | 1.5399        | 79.5°    | 0.9833        | 0.1822        | 5.3955        |
| 57.5°    | 0.8434        | 0.5373        | 1.5697        | 80.0°    | 0.9848        | 0.1736        | 5.6713        |
| 58.0°    | 0.8480        | 0.5299        | 1.6003        | 80.5°    | 0.9863        | 0.1650        | 5.9758        |
| 58.5°    | 0.8526        | 0.5225        | 1.6319        | 81.0°    | 0.9877        | 0.1564        | 6.3138        |
| 59.0°    | 0.8572        | 0.5150        | 1.6643        | 81.5°    | 0.9890        | 0.1478        | 6.6912        |
| 59.5°    | 0.8616        | 0.5075        | 1.6977        | 82.0°    | 0.9903        | 0.1392        | 7.1154        |
| 60.0°    | 0.8660        | 0.5000        | 1.7321        | 82.5°    | 0.9914        | 0.1305        | 7.5958        |
| 60.5°    | 0.8704        | 0.4924        | 1.7675        | 83.0°    | 0.9925        | 0.1219        | 8.1443        |
| 61.0°    | 0.8746        | 0.4848        | 1.8040        | 83.5°    | 0.9936        | 0.1132        | 8.7769        |
| 61.5°    | 0.8788        | 0.4772        | 1.8418        | 84.0°    | 0.9945        | 0.1045        | 9.5144        |
| 62.0°    | 0.8829        | 0.4695        | 1.8807        | 84.5°    | 0.9954        | 0.0958        | 10.385        |
| 62.5°    | 0.8870        | 0.4617        | 1.9210        | 85.0°    | 0.9962        | 0.0872        | 11.430        |
| 63.0°    | 0.8910        | 0.4540        | 1.9626        | 85.5°    | 0.9969        | 0.0785        | 12.706        |
| 63.5°    | 0.8949        | 0.4462        | 2.0057        | 86.0°    | 0.9976        | 0.0698        | 14.301        |
| 64.0°    | 0.8988        | 0.4384        | 2.0503        | 86.5°    | 0.9981        | 0.0610        | 16.350        |
| 64.5°    | 0.9026        | 0.4305        | 2.0965        | 87.0°    | 0.9986        | 0.0523        | 19.081        |
| 65.0°    | 0.9063        | 0.4226        | 2.1445        | 87.5°    | 0.9990        | 0.0436        | 22.904        |
| 65.5°    | 0.9100        | 0.4147        | 2.1943        | 88.0°    | 0.9994        | 0.0349        | 28.636        |
| 66.0°    | 0.9135        | 0.4067        | 2.2460        | 88.5°    | 0.9997        | 0.0262        | 38.188        |
| 66.5°    | 0.9171        | 0.3987        | 2.2998        | 89.0°    | 0.9998        | 0.0175        | 57.290        |
| 67.0°    | 0.9205        | 0.3907        | 2.3559        | 89.5°    | 1.0000        | 0.0087        | 114.59        |
| 67.5°    | 0.9239        | 0.3827        | 2.4142        | 90.0°    | 1.0000        | 0.0000        | —             |

- 7  $AB = AC$ である二等辺三角形  $ABC$  を考える．辺  $AB$  の中点を  $M$  とし，辺  $AB$  を延長した直線上に点  $N$  を， $AN : NB = 2 : 1$  となるようにとる．このとき  $\angle BCM = \angle BCN$  となることを示せ．ただし，点  $N$  は辺  $AB$  上にはないものとする．

- 8 定数  $a$  は実数であるとする．方程式

$$(x^2 + ax + 1)(3x^2 + ax - 3) = 0$$

を満たす実数  $x$  はいくつあるか． $a$  の値によって分類せよ．

- 9 空間内に原点  $O$  を中心とし半径  $1$  の球面  $S$  を考え， $S$  上の  $2$  点を  $A\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ， $B\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  とする． $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$  で与えられる平面で  $S$  を切った切り口の円において， $A$  と  $B$  を結ぶ弧のうち短い方の長さを  $\ell_1$  とする．また  $3$  点  $O$ ， $A$ ， $B$  を通る平面で  $S$  を切った切り口の円において， $A$  と  $B$  を結ぶ弧のうち短い方を長さを  $\ell_2$  とする．このとき  $\ell_1 > \ell_2$  を証明せよ．

## 解答例

**1** (i)  $p < 0$  のとき

$y = px + q$  は単調減少,  $y = \log x$  は単調増加で

$$\lim_{x \rightarrow +0} (px + q) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty$$

このとき, 直線  $y = px + q$  と関数  $y = \log x$  のグラフは共有点をもつ.

(ii)  $p = 0$  のとき, 点  $(e^q, q)$  が  $y = px + q$  と  $y = \log x$  のグラフの共有点.

(iii)  $p > 0$  のとき,  $f(x) = px + q - \log x$  とおくと

$$f'(x) = p - \frac{1}{x} = \frac{px - 1}{x}$$

| $x$     | (0) | $\dots$    | $\frac{1}{p}$ | $\dots$    |
|---------|-----|------------|---------------|------------|
| $f'(x)$ |     | $-$        | 0             | $+$        |
| $f(x)$  |     | $\searrow$ | 極小            | $\nearrow$ |

このとき,  $f\left(\frac{1}{p}\right) > 0$  を満たせばよいから

$$p \cdot \frac{1}{p} + q - \log \frac{1}{p} > 0 \quad \text{すなわち} \quad 1 + q + \log p > 0$$

(i)~(iii) より, 求める必要十分条件は

$$p > 0, \quad 1 + q + \log p > 0$$



- 2** X, Y を A 以外の頂点とする ( $X \neq Y$ ).

時刻  $n$  までに 2 頂点 A, X のみに点 P が現れる確率を  $p_2$  とすると

$$p_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

時刻  $n$  までに 3 頂点 A, X, Y のすべてに点 P が現れる確率を  $p_3$  とすると

$$p_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2p_2$$

時刻  $n$  までに 4 頂点 A, B, C, D のすべてに点 P が現れる確率を  $p$  とすると

$$\begin{aligned} p &= 1 - {}_3C_1 \cdot p_2 - {}_3C_2 \cdot p_3 \\ &= 1 - 3p_2 - 3 \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2p_2 \right\} \\ &= 1 + 3p_2 - 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 + 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{aligned}$$

■

- 3** 4 直線上にそれぞれに原点でない 4 点 A, B, C, D を取ったとき, 条件から  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OC}$  は 1 次独立である. 点 D に対して

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

を満たすように, 3 点 A, B, C をとることができる.  $\overrightarrow{OB'} = -\overrightarrow{OB}$  とおくと

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{B'A}$$

このとき, 四角形 AB'CD は平行四辺形である.

■

**4**  $y = |x^2 - 2|$ ,  $y = |2x^2 + ax - 1|$  から  $y$  を消去すると

$$|x^2 - 2| = |2x^2 + ax - 1| \quad \text{ゆえに} \quad 2x^2 + ax - 1 = \pm(x^2 - 2)$$

すなわち  $3x^2 + ax - 3 = 0 \cdots \textcircled{1}$  または  $x^2 + ax + 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$

①, ② の判別式をそれぞれ  $D_1$ ,  $D_2$  とすると

$$D_1 = a^2 + 36 > 0, \quad D_2 = a^2 - 4 = (a + 2)(a - 2)$$

①, ② が共通解をもつとき, これを  $p$  とおくと

$$3p^2 + ap - 3 = 0, \quad p^2 + ap + 1 = 0$$

上の 2 式から  $p = \pm\sqrt{2}$ ,  $a = \mp\frac{3\sqrt{2}}{2}$  (複号同順)

よって  $|a| < 2$  のとき 2 個

$|a| = 2$ ,  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$  のとき 3 個

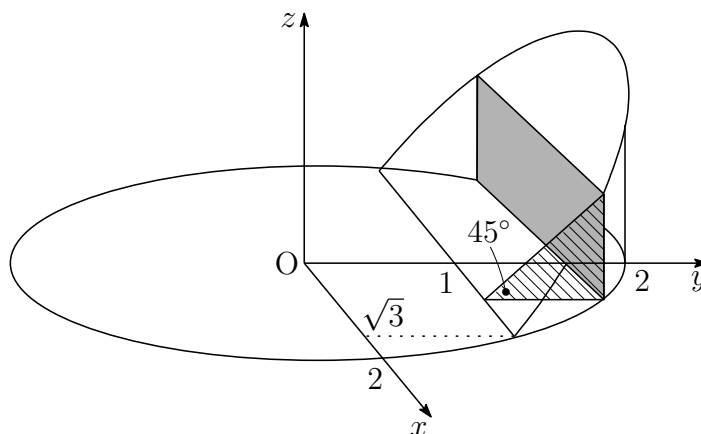
$2 < |a| < \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ,  $\frac{3\sqrt{2}}{2} < |a|$  のとき 4 個



5 求める立体は次の領域である.

$$D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq y - 1\}$$

$D$  の平面  $y = t$  ( $1 \leq t \leq 2$ ) による断面 (長方形) 積は  $2\sqrt{4-t^2}(t-1)$

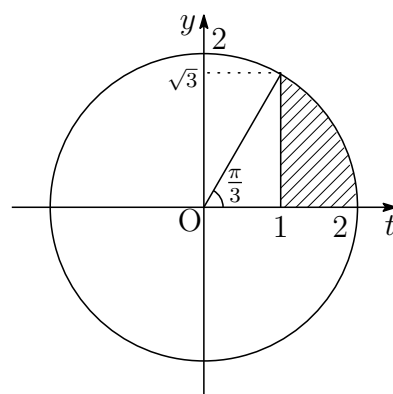


よって, 求める立体の体積を  $V$  とすると

$$V = \int_1^2 2\sqrt{4-t^2}(t-1) dt = \int_1^2 2t\sqrt{4-t^2} dt - 2 \int_1^2 \sqrt{4-t^2} dt$$

このとき

$$\begin{aligned} \int_1^2 2t\sqrt{4-t^2} dt &= \left[ -\frac{2}{3}(4-t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 \\ &= 2\sqrt{3}, \\ \int_1^2 \sqrt{4-t^2} dt &= \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \\ &= \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



$$\text{よって } V = 2\sqrt{3} - 2 \left( \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi$$

別解  $D$  の平面  $x = t$  ( $-\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3}$ ) による断面 (直角二等辺三角形) 積は

$$\frac{1}{2}(\sqrt{4-t^2}-1)^2 = \frac{1}{2}(5-t^2-2\sqrt{4-t^2})$$

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{2}(5-t^2-2\sqrt{4-t^2}) dt = \int_0^{\sqrt{3}} (5-t^2-2\sqrt{4-t^2}) dt \\ &= \left[ 5t - \frac{t^3}{3} \right]_0^{\sqrt{3}} - 2 \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-t^2} dt = 4\sqrt{3} - 2 \left( \frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi \end{aligned}$$

■

- 6 地球の半径を  $R$  とすると、同じ緯度にある 2 地点 A, B の地軸からの距離は

$$R \cos 60^\circ = \frac{R}{2}$$

$135^\circ - 75^\circ = 60^\circ$ , すなわち,  $\frac{\pi}{3}$  より

$$R_1 = \frac{R}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi R}{6}$$

2 地点 A, B を通り, 地軸と垂直な平面の地軸との交点を C とすると,  $\triangle ABC$  は一辺の長さが  $\frac{R}{2}$  の正三角形である.

地球の中心を O, 2 地点 A, B の中点を M とし,  $\theta = \angle AOM$  とすると

$$OA = R, \quad AM = \frac{R}{4}, \quad \angle AMO = \frac{\pi}{2} \text{ より } \sin \theta = \frac{1}{4}$$

三角比の表から  $\frac{14.0}{180}\pi < \theta < \frac{14.5}{180}\pi$  ゆえに  $R_2 = R \cdot 2\theta < \frac{29\pi R}{180}$

したがって  $\frac{R_2}{R_1} = \frac{29}{30} < \frac{291}{300} = \frac{97}{100}$

よって,  $R_2$  は  $R_1$  より 3%以上短くなる. ■

- 7 辺 AC の中点を L とする.  
 $\triangle ABC$  は二等辺三角形であるから

$$\angle MBC = \angle LCB, \quad MB = LC$$

$\triangle MBC$  と  $\triangle LCB$  において, BC は共通より

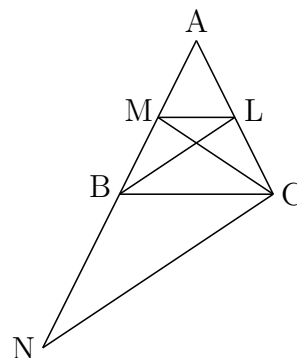
$$\triangle MBC \equiv \triangle LCB$$

したがって  $\angle BCM = \angle CBL \dots \textcircled{1}$

2 点 B, L は 2 辺 AN, AC のそれぞれの中点であるから, 中点連結定理により

$$BL \parallel NC \text{ ゆえに } \angle CBL = \angle BCN \dots \textcircled{2}$$

①, ② より  $\angle BCM = \angle BCN$  ■



**8** 2つの2次方程式

$$\begin{cases} 3x^2 + ax - 3 = 0 & \cdots \textcircled{1} \\ x^2 + ax + 1 = 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ②の判別式をそれぞれ  $D_1, D_2$  とすると

$$D_1 = a^2 + 36 > 0, \quad D_2 = a^2 - 4 = (a+2)(a-2)$$

①, ②が共通解をもつとき, これを  $p$  とおくと

$$3p^2 + ap - 3 = 0, \quad p^2 + ap + 1 = 0$$

上の2式から  $p = \pm\sqrt{2}, a = \mp\frac{3\sqrt{2}}{2}$  (複号同順)

よって  $|a| < 2$  のとき 2個

$|a| = 2, \frac{3\sqrt{2}}{2}$  のとき 3個

$2 < |a| < \frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} < |a|$  のとき 4個

■

**9**  $A\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  に対して,  $C\left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  をとると

$$\angle ACB = \frac{\pi}{3} \quad \text{ゆえに} \quad l_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\theta = \angle AOB \text{ とすると} \quad \cos \theta = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} = \frac{7}{8}$$

$$7 > 4\sqrt{3} \text{ であるから} \quad \cos \theta = \frac{7}{8} > \frac{\sqrt{3}}{2} > \cos \frac{\pi}{6} \quad \text{ゆえに} \quad \theta < \frac{\pi}{6}$$

$$\text{したがって} \quad l_2 = 1 \cdot \theta < \frac{\pi}{6} \quad \text{よって} \quad l_1 > l_2$$

■