

平成14年度 京都大学 2次試験前期日程 (数学問題)150分
理, 医, 薬, 工, 農, 総合人間 (理系), 経済 (理系)

問題 1 2 3 4 5 6

1 数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n と表す. この数列が

$$a_1 = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1, \quad n(n-2)a_{n+1} = S_n \quad (n \geq 1)$$

を満たすとき, 一般項 a_n を求めよ.

2 半径1の円周上に相異なる3点 A, B, C がある.

- (1) $AB^2 + BC^2 + CA^2 > 8$ ならば $\triangle ABC$ は鋭角三角形であることを示せ.
- (2) $AB^2 + BC^2 + CA^2 \leq 9$ が成立することを示せ. また, この等号が成立するのはどのような場合か.

3 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ は整数を係数とする x の4次式とする. 4次方程式 $f(x) = 0$ の重解も込めた4つの解のうち, 2つは整数で残りの2つは虚数であるという. このとき a, b, c の値を求めよ.

4 (1) $x \geq 0$ で定義された関数 $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ について, 導関数 $f'(x)$ を求めよ.

(2) 極方程式 $r = \theta$ ($\theta \geq 0$) で定義される曲線の, $0 \leq \theta \leq \pi$ の部分の長さを求めよ.

5 a, b, c を実数とする. $y = x^3 + 3ax^2 + 3bx$ と $y = c$ のグラフが相異なる3つの交点を持つという. このとき $a^2 > b$ が成立することを示し, さらにこれらの交点の x 座標は开区間 $(-a - 2\sqrt{a^2 - b}, -a + 2\sqrt{a^2 - b})$ に含まれていることを示せ.

6 $0 < \theta < 90$ とし, a は正の数とする. 複素数平面上の点 $z_0, z_1, z_2, \dots$ をつぎの条件 (i), (ii) を満たすように定める.

(i) $z_0 = 0, z_1 = a$

(ii) $n \geq 1$ のとき, 点 $z_n - z_{n-1}$ を原点のまわりに θ° 回転すると点 $z_{n+1} - z_n$ に一致する.

このとき点 z_n ($n \geq 1$) が点 z_0 と一致するような n が存在するための必要十分条件は, θ が有理数であることを示せ.

解答例

1 漸化式は $n(n-2)a_{n+1} = S_n \quad (n \geq 1) \quad \cdots \textcircled{1}$
 $n \geq 2$ とすると $(n-1)(n-3)a_n = S_{n-1}$

上の2式から、辺々の差をとると、 $S_n - S_{n-1} = a_n$ より

$$n(n-2)a_{n+1} - (n-1)(n-3)a_n = a_n$$

整理すると $n(n-2)a_{n+1} = (n-2)^2a_n$

$$n \geq 3 \text{ のとき} \quad n(n-1)a_{n+1} = (n-2)(n-1)a_n$$

$n \geq 3$ のとき、数列 $\{(n-2)(n-1)a_n\}$ は一定であるから、これを c とすると

$$(n-2)(n-1)a_n = c \quad \text{ゆえに} \quad a_n = c \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} \right) \quad (*)$$

$$\text{したがって} \quad \sum_{k=3}^n a_k = c \sum_{k=3}^n \left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-1} \right) = c \left(1 - \frac{1}{n-1} \right) \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ に } n=1 \text{ を代入すると } -a_2 = S_1 \quad \text{ゆえに} \quad a_1 + a_2 = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より } S_n = a_1 + a_2 + \sum_{k=3}^n a_k = c \left(1 - \frac{1}{n-1} \right)$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$ より $c = 1$ これを $(*)$ に代入すると

$$a_n = \frac{1}{(n-1)(n-2)} \quad (n \geq 3)$$

$a_1 = 1$ を $\textcircled{3}$ に代入すると $a_2 = -1$

$$\text{よって} \quad a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \quad a_n = \frac{1}{(n-1)(n-2)} \quad (n \geq 3) \quad \blacksquare$$

- 2** (1) $\triangle ABC$ の外心を O とし, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とすると

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 + CA^2 &= |\vec{b} - \vec{a}|^2 + |\vec{c} - \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{c}|^2 \\ &= 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2) - 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) \\ &= 6 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) \end{aligned} \quad (*)$$

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 > 8 \text{ のとき } 6 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) > 8$$

$$-1 - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{a} > 0$$

$$\begin{aligned} \text{このとき } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = |\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= 1 - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= 2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + (-1 - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{a}) \\ &> 2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b} + \vec{c}|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

したがって $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} > 0$ すなわち $\angle CAB$ は鋭角

対称性により $\angle ABC, \angle BCA$ も鋭角 よって $\triangle ABC$ は鋭角三角形

別解 $\triangle ABC$ の外接円の半径が 1 であるから $AB \leq 2$

$$\angle BCA \geq 90^\circ \text{ とすると } BC^2 + CA^2 \leq AB^2$$

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 \leq 2AB^2 \leq 2 \cdot 2^2 = 8$$

$$\angle BCA \geq 90^\circ \implies AB^2 + BC^2 + CA^2 \leq 8 \text{ であるから}$$

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 > 8 \implies \angle BCA < 90^\circ$$

対称性により, $AB^2 + BC^2 + CA^2 > 8 \implies \angle CAB < 90^\circ, \angle ABC < 90^\circ$

よって, $AB^2 + BC^2 + CA^2 > 8$ のとき, $\triangle ABC$ は鋭角三角形.

$$\begin{aligned} (2) (*) \text{ より } 9 - (AB^2 + BC^2 + CA^2) &= 9 - \{6 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a})\} \\ &= 3 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) \\ &= |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{したがって } AB^2 + BC^2 + CA^2 \leq 9$$

上式において, 等号が成立するとき $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

このとき, 外心と重心が一致するから, $\triangle ABC$ は, 正三角形である.

補足 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ より, $\vec{b} + \vec{c} = -\vec{a}$ であるから

$$|\vec{b} + \vec{c}| = |\vec{a}| \quad \text{ゆえに} \quad |\vec{b}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2$$

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1 \quad \text{より} \quad 2\vec{b} \cdot \vec{c} = -1 \quad \text{ゆえに} \quad |\vec{b} - \vec{c}|^2 = 2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} = 3$$

$$\text{したがって} \quad |\vec{BC}| = \sqrt{3} \quad \text{対称性により} \quad BC = CA = AB = \sqrt{3}$$

別解 $\triangle ABC$ の外接円の半径が 1 であるから, 正弦定理により

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2 \cdot 1$$

$$\text{したがって} \quad BC = 2 \sin A, \quad CA = 2 \sin B, \quad AB = 2 \sin C$$

$$A + B + C = \pi \quad \text{より,} \quad \cos(A + B) = \cos(\pi - C) = -\cos C \quad \text{であるから}$$

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 + CA^2 &= 4 \sin^2 C + 4 \sin^2 A + 4 \sin^2 B \\ &= 4(1 - \cos^2 C) + 2(1 - \cos 2A) + 2(1 - \cos 2B) \\ &= 8 - 4 \cos^2 C - 2(\cos 2A + \cos 2B) \\ &= 8 - 4 \cos^2 C - 4 \cos(A + B) \cos(A - B) \\ &= 8 - 4 \cos^2 C + 4 \cos C \cos(A - B) \quad (** \\ &= 8 + 4 \cos C \{-\cos C + \cos(A - B)\} \\ &= 8 + 4 \cos C \{\cos(A + B) + \cos(A - B)\} \\ &= 8 + 8 \cos A \cos B \cos C \quad (***) \end{aligned}$$

$$(1) (***) \text{ より } AB^2 + BC^2 + CA^2 > 8 \iff \cos A \cos B \cos C > 0$$

$\triangle ABC$ の内角で, 鈍角は高々 1 個, すなわち, $\cos A, \cos B, \cos C$ で負であるものは高々 1 個である. このとき, $\cos A, \cos B, \cos C$ はすべて正であるから, $\triangle ABC$ は鋭角三角形である.

$$(2) (**) \text{ より}$$

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 8 - \{2 \cos C - \cos(A - B)\}^2 + \cos^2(A - B) \leq 9$$

上式において等号が成立するとき, $-\pi < A - B < \pi$ に注意して

$$2 \cos C - \cos(A - B) = 0 \quad \text{かつ} \quad \cos(A - B) = 1$$

上の第 2 式から, $A - B = 0$, すなわち, $A = B$. 第 1 式に代入して

$$2 \cos C - 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad C = \frac{\pi}{3} \quad \text{さらに} \quad A = B = \frac{\pi}{3}$$

よって, 等号が成立するとき, $\triangle ABC$ は正三角形である. ■

3 4次方程式 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ の整数解を n とすると

$$n^4 + an^3 + bn^2 + cn + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad n(n^3 + an^2 + bn + c) = -1$$

a, b, c は整数であるから, $n^3 + an^2 + bn + c$ は整数. 上式より n は ± 1 したがって, $f(x)$ の x^4 の係数および定数項に注意して

$$f(x) = (x \pm 1)^2(x^2 + px + 1) \quad \text{または} \quad f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + qx - 1)$$

(i) $f(x) = (x \pm 1)^2(x^2 + px + 1)$ のとき

$$f(x) = x^4 + (p \pm 2)x^3 + (2 \pm 2p)x^2 + (p \pm 2)x + 1 \quad (\text{複号同順})$$

$$f(x) \text{ の係数から } a = p \pm 2, \quad b = 2 \pm 2p, \quad c = p \pm 2 \quad (\text{複号同順})$$

これらは整数であるから, $p \pm 2$ が整数より, p は整数.

$x^2 + px + 1 = 0$ が虚数解をもつから, 係数について

$$p^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0 \quad \text{これを満たす整数 } p \text{ は } p = 1, 0, -1$$

したがって

$$p = 1, 0, -1, \quad a = p \pm 2, \quad b = 2 \pm 2p, \quad c = p \pm 2 \quad (\text{複号同順})$$

(ii) $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + qx - 1)$ のとき, $x^2 + qx - 1 = 0$ の係数について

$$q^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) > 0 \quad \text{このとき, 虚数解をもたない}$$

よって, 求める (a, b, c) は

$$(a, b, c) = (3, 4, 3), (-1, 0, -1), (2, 2, 2), (-2, 2, -2) \\ (1, 0, 1), (-3, 4, -3)$$



4 (1) $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ より $f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(2) 求める弧長を L とすると, $r = \theta$ より

$$L = \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta = \int_0^\pi \sqrt{1+\theta^2} d\theta \quad (*)$$

ここで, $\theta\sqrt{1+\theta^2}$ を微分すると

$$\begin{aligned} (\theta\sqrt{1+\theta^2})' &= \sqrt{1+\theta^2} + \theta \cdot \frac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2}} \\ &= \sqrt{1+\theta^2} + \frac{(1+\theta^2) - 1}{\sqrt{1+\theta^2}} \\ &= 2\sqrt{1+\theta^2} - \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}} \end{aligned}$$

(1) の結果から $\{\log(\theta + \sqrt{1+\theta^2})\}' = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}$

上の 2 式の辺々を加えると

$$\{\theta\sqrt{1+\theta^2} + \log(\theta + \sqrt{1+\theta^2})\}' = 2\sqrt{1+\theta^2} \quad (**)$$

$$\begin{aligned} (*), (**) \text{ より } L &= \int_0^\pi \sqrt{1+\theta^2} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\theta\sqrt{1+\theta^2} + \log(\theta + \sqrt{1+\theta^2}) \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{2} \{ \pi\sqrt{1+\pi^2} + \log(\pi + \sqrt{1+\pi^2}) \} \end{aligned}$$

補足 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ より

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta$$

したがって $\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2$

よって $\int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta$ ■

- 5 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx$ とおく. $y = f(x)$ と $y = c$ が相異なる 3 つの交点を持つとき, $y = f(x)$ が極大値と極小値をもつことが必要条件であるから

$$f'(x) = 3(x^2 + 2ax + b) = 0 \quad (*)$$

が異なる 2 つの実数解を持ち, 係数について

$$a^2 - b > 0 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 > b$$

$f(x)$ が $x = \alpha$, $x = \beta$ でそれぞれ極大値, 極小値をとるとき, これらは, 2 次方程式 $(*)$ の解であるから $(\alpha < \beta)$

$$\alpha = -a - \sqrt{a^2 - b}, \quad \beta = -a + \sqrt{a^2 - b}$$

3 次方程式 $f(x) - f(\alpha) = 0$, すなわち, $x^3 + 3ax^2 + 3bx - f(\alpha) = 0$ の解を α (2 重解), γ とすると, 解と係数の関係により

$$2\alpha + \gamma = -3a \quad \text{ゆえに} \quad \gamma = -a + 2\sqrt{a^2 - b}$$

同様に, 3 次方程式 $f(x) - f(\beta) = 0$, すなわち, $x^3 + 3ax^2 + 3bx - f(\beta) = 0$ の解を β (2 重解), δ とすると, 解と係数の関係により

$$2\beta + \delta = -3a \quad \text{ゆえに} \quad \delta = -a - 2\sqrt{a^2 - b}$$

$y = f(x)$ と $y = c$ のグラフが相異なる 3 つの交点をもつとき, $f(\beta) < c < f(\alpha)$ より, これらの交点の x 座標は, 开区間 (δ, γ) , すなわち, 开区間

$$(-a - 2\sqrt{a^2 - b}, -a + 2\sqrt{a^2 - b})$$

に含まれる.

解説 n 次多項式 $f(x)$ の x^n の係数が A であるとき, $f(x)$ は次のように展開できる¹.

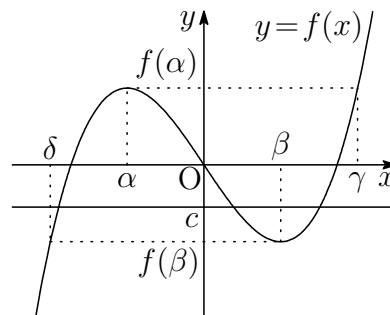
$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + A(x-a)^n$$

x^3 の係数が A である 3 次関数 $f(x)$ について, 任意の定数 a に対し

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + A(x-a)^3$$

が成り立つ.

¹<http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai-2020.pdf> (p.15 を参照)



特に, $f''(a) = 0$ を満たす値 a をとると (a は変曲点の x 座標)

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + A(x - a)^3 \quad (*)$$

x を $2a - x$ に入れ替えると

$$f(2a - x) = f(a) - f'(a)(x - a) - A(x - a)^3$$

上の 2 式の辺々を加えると

$$f(x) + f(2a - x) = 2f(a) \quad \text{ゆえに} \quad \frac{f(x) + f(2a - x)}{2} = f(a) \quad (**)$$

したがって, 曲線 $y = f(x)$ 上の 2 点 $(x, f(x))$, $(2a - x, f(2a - x))$ は, 変曲点 $(a, f(a))$ に関して対称である.

また, $f(x)$ が $x = \alpha, \beta$ で極値をとるとき, $f'(x) = 3A(x - \alpha)(x - \beta)$ より

$$f''(x) = 3A(2x - \alpha - \beta) \quad (***)$$

$f(x)$ を $x = \alpha$ を極として展開すると, $f'(\alpha) = 0$ より

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\alpha) + \frac{1}{2}f''(\alpha)(x - \alpha)^2 + A(x - \alpha)^3 \\ &= f(\alpha) + \frac{3}{2}A(\alpha - \beta)(x - \alpha)^2 + A(x - \alpha)^3 \\ &= f(\alpha) + \frac{A}{2}(x - \alpha)^2(2x - 3\beta + \alpha) \end{aligned}$$

同様に, $f(x)$ を $x = \beta$ を極として展開すると, $f'(\beta) = 0$ より

$$f(x) = f(\beta) + \frac{A}{2}(x - \beta)^2(2x - 3\alpha + \beta)$$

上の結果から次が成り立つ.

$$f(\alpha) = f\left(\frac{3\beta - \alpha}{2}\right), \quad f(\beta) = f\left(\frac{3\alpha - \beta}{2}\right)$$

(***) より, 変曲点の x 座標 a は, $\frac{\alpha + \beta}{2}$ であるから, $x = \alpha$, $a = \frac{\alpha + \beta}{2}$ を (***) に代入することで, 極値をとる 2 点が変曲点に関して対称であることが分かる. また, 数列 $\frac{3\alpha - \beta}{2}, \alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}, \beta, \frac{3\beta - \alpha}{2}$ は等差数列をなす. ■

6 $w = \cos \theta^\circ + i \sin \theta^\circ$ とおくと $z_{n+1} - z_n = w(z_n - z_{n-1})$ ($n \geq 1$)

$$z_n - z_{n-1} = (z_1 - z_0)w^{n-1} = aw^{n-1}$$

したがって
$$\sum_{k=1}^n (z_k - z_{k-1}) = a \sum_{k=1}^n w^{k-1}$$

$$z_n = \frac{a(1 - w^n)}{1 - w}$$

z_n が $z_0 = 0$ と一致するとき, $w^n = 1$ となる正の整数 n が存在する.

これを満たす n が存在する条件は

$$n\theta = 360k \tag{*}$$

を満たす整数 k が存在することで, このとき $\theta = \frac{360k}{n}$ は有理数である.

逆に, θ が有理数, すなわち, $\theta = \frac{q}{p}$ (p, q は整数) とすると, $n = 360p$ のとき

$$n\theta = 360q$$

となり, 条件 (*) を満たす. ■