

平成26年度 京都大学 2次試験前期日程 (数学問題)120分
総合人間 (文系), 文, 教育 (文系), 法, 経済 (文系)

問題 1 2 3 4 5

1 $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ とする. x についての4次方程式

$$\{x^2 - 2(\cos \theta)x - \cos \theta + 1\}\{x^2 + 2(\tan \theta)x + 3\} = 0$$

は虚数解を少なくとも1つ持つことを示せ.

2 t を実数とする. $y = x^3 - x$ のグラフ C へ点 $P(1, t)$ から接線を引く.

- (1) 接線がちょうど1本だけ引けるような t の範囲を求めよ.
- (2) t が (1) で求めた範囲を動くとき, $P(1, t)$ から C へ引いた接線と C で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする. $S(t)$ の取りうる値の範囲を求めよ.

3 座標空間における次の3つの直線 l, m, n を考える.

l は点 $A(1, 0, -2)$ を通り, ベクトル $\vec{u} = (2, 1, -1)$ に平行な直線である.

m は点 $B(1, 2, -3)$ を通り, ベクトル $\vec{v} = (1, -1, 1)$ に平行な直線である.

n は点 $C(1, -1, 0)$ を通り, ベクトル $\vec{w} = (1, 2, 1)$ に平行な直線である.

P を l 上の点として, P から m, n へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする. このとき, $PQ^2 + PR^2$ を最小にするような P と, そのときの $PQ^2 + PR^2$ を求めよ,

4 次の式

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = 2a_n - 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える.

- (1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.
- (2) 次の不等式

$$a_n^2 - 2a_n > 10^{15}$$

を満たす最小の自然数 n を求めよ. ただし, $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい.

5 1 から 20 までの目がふられた正 20 面体のサイコロがあり, それぞれの目が出る確率は等しいものとする. A, B の 2 人がこのサイコロをそれぞれ一回ずつ投げ, 大きな目を出した方はその目を得点とし, 小さな目を出した方は得点を 0 とする. また同じ目が出た場合は, A, B ともに得点を 0 とする. このとき, A の得点の期待値を求めよ.

解答例

1 2つの2次方程式

$$x^2 - 2(\cos \theta)x - \cos \theta + 1 = 0, \quad x^2 + 2(\tan \theta)x + 3 = 0$$

の判別式を, それぞれ D_1 , D_2 とすると

$$\begin{aligned} D_1/4 &= \cos^2 \theta + \cos \theta - 1 \\ &= \left(\cos \theta - \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right) \left(\cos \theta - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right), \\ D_2/4 &= \tan^2 \theta - 3 \\ &= (\tan \theta + \sqrt{3})(\tan \theta - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$2 < \sqrt{5} < 3$ より $\frac{1}{2} < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < 1$ であるから, α を次のように定める.

$$\cos \alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad (0^\circ < \alpha < 60^\circ)$$

したがって, D_1 , D_2 の符号は次のようになる.

θ	0°	$\dots$	α	$\dots$	60°	$\dots$	(90°)
D_1	+	+	0	-	-	-	
D_2	-	-	-	-	0	+	

$0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ において, D_1 , D_2 の少なくとも一方が負であるから, 与えられた4次方程式は, 虚数解を少なくとも1つ持つ. ■

- 2 (1) $C: y = x^3 - x$ より $y' = 3x^2 - 1$

C 上の点 $A(s, s^3 - s)$ における接線の方程式は

$$y - (s^3 - s) = (3s^2 - 1)(x - s) \quad \text{すなわち} \quad y = (3s^2 - 1)x - 2s^3$$

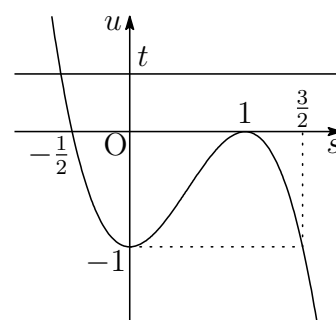
この接線が点 $P(1, t)$ を通るとき $t = -2s^3 + 3s^2 - 1 \quad \dots (*)$

$f(s) = -2s^3 + 3s^2 - 1$ とおくと

$$f'(s) = -6s^2 + 6s = -6s(s - 1)$$

$f(s)$ の増減表は次のようになる.

s	$\dots$	0	$\dots$	1	$\dots$
$f'(s)$	$-$	0	$+$	0	$\dots$
$f(s)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$



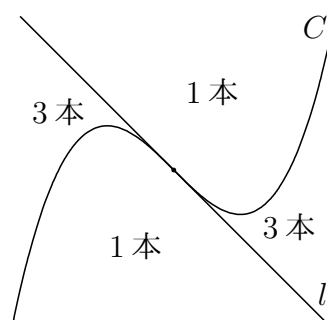
実数 t に対し, 方程式 $(*)$ の実数解 s がただ1つだけであるとき, $u = f(s)$ のグラフと直線 $u = t$ の共有点がただ1つである.

よって, 求める t の値の範囲は $t < -1, 0 < t$

補足 3次関数のグラフ C 上の変曲点 ($y'' = 0$) における接線 l とそのグラフにより, P から引ける接線の本数は右の図のようになる. P が変曲点を除く C および l 上にあるとき2本, 変曲点では l のみの1本である.

本題では, 変曲点 $(0, 0)$, $l: y = -x$.

直線 $x = 1$ と C および l の共有点は, それぞれ $(1, 0)$, $(1, -1)$



- (2) $C: y = x^3 - x$ と C 上の点 $A(s, s^3 - s)$ における接線 $y = (3s^2 - 1)x - 2s^3$ の方程式より

$$x^3 - x - \{(3s^2 - 1)x - 2s^3\} = (x - s)^2(x + 2s)$$

点 A 以外の共有点の x 座標は $-2s$ であるから, 求める面積 $S(t)$ は¹

$$S(t) = \frac{1}{12} \{s - (-2s)\}^4 = \frac{27}{4} s^4$$

(1) で示したグラフから, $t < -1, 0 < t$ のとき $s < -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} < s$

したがって $s^4 > \frac{1}{16}$ よって $S(t) > \frac{27}{64}$

■

¹<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-tech.2010.kouki.pdf> の [1] を参照.

3 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおくと, 実数 r , s , t を用いて

$$\overrightarrow{OP} = \vec{a} + r\vec{u}, \quad \overrightarrow{OQ} = \vec{b} + s\vec{v}, \quad \overrightarrow{OR} = \vec{c} + t\vec{w}$$

$$\text{ゆえに} \quad \overrightarrow{PQ} = \vec{b} - \vec{a} + s\vec{v} - r\vec{u}, \quad \overrightarrow{PR} = \vec{c} - \vec{a} + t\vec{w} - r\vec{u}$$

$\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}$, $\overrightarrow{PR} \perp \vec{w}$ より, $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0$, $\overrightarrow{PR} \cdot \vec{w} = 0$ であるから

$$(\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{v} + s|\vec{v}|^2 - r\vec{u} \cdot \vec{v} = 0, \quad (\vec{c} - \vec{a}) \cdot \vec{w} + t|\vec{w}|^2 - r\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$$

$$\text{ここで} \quad \vec{b} - \vec{a} = (0, 2, -1), \quad \vec{c} - \vec{a} = (0, -1, 2),$$

$$(\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{v} = -3, \quad (\vec{c} - \vec{a}) \cdot \vec{w} = 0,$$

$$|\vec{v}|^2 = 3, \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0, \quad |\vec{w}|^2 = 6, \quad \vec{u} \cdot \vec{w} = 3$$

$$\text{したがって} \quad -3 + 3s = 0, \quad 6t - 3r = 0 \quad \text{ゆえに} \quad s = 1, \quad r = 2t$$

$$\overrightarrow{PQ} = (\vec{b} - \vec{a}) + \vec{v} - 2t\vec{u}$$

$$= (0, 2, -1) + (1, -1, 1) - 2t(2, 1, -1)$$

$$= (1 - 4t, 1 - 2t, 2t),$$

$$\overrightarrow{PR} = \vec{c} - \vec{a} + t\vec{w} - 2t\vec{u}$$

$$= (0, -1, 2) + t(1, 2, 1) - 2t(2, 1, -1)$$

$$= (-3t, -1, 2 + 3t),$$

$$PQ^2 + PR^2 = |\overrightarrow{PQ}|^2 + |\overrightarrow{PR}|^2$$

$$= (1 - 4t)^2 + (1 - 2t)^2 + (2t)^2 + (-3t)^2 + (-1)^2 + (2 + 3t)^2$$

$$= 42t^2 + 7$$

$PQ^2 + PR^2$ は, $t = 0$ のとき最小値 7 をとる.

このとき, $r = 0$ より, $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$, すなわち, $P(1, 0, -2)$ ■

- 4 (1) $a_{n+1} = 2a_n - 1$ より $a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1)$
 数列 $\{a_n - 1\}$ は公比 2 の等比数列であるから

$$a_n - 1 = 2^{n-1}(a_1 - 1) \quad \text{すなわち} \quad a_n = 1 + 2^{n-1}$$

- (2) $a_n^2 - 2a_n > 10^{15}$ より $(a_n - 1)^2 > 10^{15} + 1$

これに (1) の結果を代入すると $2^{2n-2} > 10^{15} + 1$

上式において $n > 1$ であるから, 上式の左辺は偶数, 右辺は奇数により

$$2^{2n-2} > 10^{15} \quad \cdots (*)$$

を満たす最小の自然数を求めればよい.

(*) の両辺の常用対数をとると

$$(2n - 2) \log_{10} 2 > 15 \quad \text{ゆえに} \quad n > 1 + \frac{15}{2 \log_{10} 2} \quad \cdots (**)$$

ここで, $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ より

$$\frac{15}{2 \times 0.3011} < \frac{15}{2 \log_{10} 2} < \frac{15}{2 \times 0.3010}$$

$$\text{ゆえに} \quad 24.90 < \frac{15}{2 \log_{10} 2} < 24.92$$

$$\text{したがって} \quad 25.90 < 1 + \frac{15}{2 \log_{10} 2} < 25.92$$

(**) より, 求める最小の自然数 n は $n = 26$

$$\text{補足 } 0.3010 = \frac{3}{10} + \frac{1}{100} = \frac{3}{10} \left(1 + \frac{1}{30}\right), \quad 0.3011 = \frac{3}{10} + \frac{11}{1000} = \frac{3}{10} \left(1 + \frac{11}{300}\right)$$

$$\log_{10} 2 = \frac{3}{10}(1 + \varepsilon) \text{ とおくと, } \frac{1}{30} < \varepsilon < \frac{11}{300} \text{ であるから}$$

$$1 - \varepsilon < \frac{1}{1 + \varepsilon} < 1 \quad \text{ゆえに} \quad 25 - 25\varepsilon < \frac{15}{2 \log_{10} 2} < 25$$

$$\frac{5}{6} < 25\varepsilon < \frac{11}{12} \text{ であるから} \quad 25 < 1 + \frac{15}{2 \log_{10} 2} < 26$$

なお, $1 - \varepsilon < \frac{1}{1 + \varepsilon} < 1$ の精度を順次高めると

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &< \frac{1}{1 + \varepsilon} < 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 \\ 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 &< \frac{1}{1 + \varepsilon} < 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 \\ 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 &< \frac{1}{1 + \varepsilon} < 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \varepsilon^4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

■

5 A の得点が k で, B の得点が $k - 1$ 以下である確率を $P(k)$ とすると

$$P(k) = \frac{1}{20} \cdot \frac{k-1}{20} = \frac{k-1}{20^2} \quad (2 \leq k \leq 20)$$

求める期待値を E とすると

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=2}^{20} k \cdot P(k) = \frac{1}{20^2} \sum_{k=2}^{20} k(k-1) = \frac{1}{20^2} \sum_{k=1}^{20} (k^2 - k) \\ &= \frac{1}{20^2} \left(\frac{1}{6} \cdot 20 \cdot 21 \cdot 41 - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 \right) \\ &= \frac{21}{20} \left(\frac{41}{6} - \frac{1}{2} \right) = \frac{21}{20} \cdot \frac{19}{3} = \frac{133}{20} \end{aligned}$$

■