

平成24年度 京都大学 2次試験前期日程 (数学問題)120分
総合人間 (文系), 文, 教育 (文系), 法, 経済 (文系)

問題 1 2 3 4 5

1 次の各問に答えよ.

- (1) 2つの曲線 $y = x^4$ と $y = x^2 + 2$ とによって囲まれる図形の面積を求めよ.
- (2) n を3以上の整数とする. 1から n までの番号をつけた n 枚の札の組が2つある. これら $2n$ 枚の札をよく混ぜ合わせて, 札を1枚ずつ3回取り出し, 取り出した順にその番号を X_1, X_2, X_3 とする. $X_1 < X_2 < X_3$ となる確率を求めよ. ただし一度取り出した札は元に戻さないものとする.

2 正四面体 $OABC$ において, 点 P, Q, R をそれぞれ辺 OA, OB, OC 上にとる. ただし P, Q, R は四面体 $OABC$ の頂点とは異なるとする. $\triangle PQR$ が正三角形ならば, 3辺 PQ, QR, RP はそれぞれ3辺 AB, BC, CA に平行であることを証明せよ.

3 実数 x, y が条件 $x^2 + xy + y^2 = 6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y$$

がとりうる値の範囲を求めよ.

4 次の命題 $(p), (q)$ のそれぞれについて, 正しいかどうかを答えよ. 正しい場合は証明し, 正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ.

- (p) 正 n 角形の頂点から3点を選んで内角の1つが 60° である三角形を作ることができるならば, n は3の倍数である.
- (q) $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ において, $AB = A'B', BC = B'C', \angle A = \angle A'$ ならば, これらの2つの三角形は合同である.

5 次の条件 $(*)$ を満たす正の実数の組 (a, b) の範囲を求め, 座標平面上に図示せよ.

$(*) \cos a\theta = \cos b\theta$ かつ $0 < \theta \leq \pi$ となる θ がちょうど1つある.

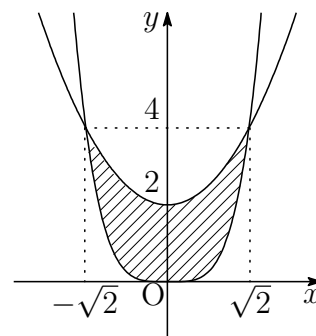
解答例

- 1 (1) $y = x^4$ と $y = x^2 + 2$ から y を消去すると

$$x^4 = x^2 + 2 \quad \text{ゆえに} \quad (x^2 + 1)(x^2 - 2) = 0$$

交点の x 座標は $x = \pm\sqrt{2}$

求める面積は、右の図の斜線部分であるから



$$\begin{aligned} & 2 \int_0^{\sqrt{2}} \{(x^2 + 2) - x^4\} dx \\ &= 2 \left[\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^5}{5} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{56}{15} \sqrt{2} \end{aligned}$$

- (2) $2n$ 枚の札を区別すると、 $2n$ 枚の札から 1 枚ずつ 3 回取り出す順列の総数は

$${}_{2n}P_3 = 2n(2n-1)(2n-2) = 4n(n-1)(2n-1)$$

$X_1 < X_2 < X_3$ となる場合の総数は、それぞれの数に同じ札が 2 枚ずつあるから

$${}_nC_3 \cdot 2^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot 8 = \frac{4}{3}n(n-1)(n-2)$$

よって、求める確率は

$$\frac{\frac{4}{3}n(n-1)(n-2)}{4n(n-1)(2n-1)} = \frac{n-2}{3(2n-1)}$$

補足 $2n$ 枚の札を区別すると、 $X_1 < X_2 < X_3$, $X_1 < X_3 < X_2$, $X_2 < X_1 < X_3$, $X_2 < X_3 < X_1$, $X_3 < X_1 < X_2$, $X_3 < X_2 < X_1$ となる場合の総数は、すべて

$$\frac{4}{3}n(n-1)(n-2) \quad (\text{通り})$$

$2n$ 枚の札を区別すると、 $X_1 = X_2$, $X_1 = X_3$, $X_2 = X_3$ となる場合の総数は、すべて

$$4n(n-1) \quad (\text{通り})$$

したがって

$$4n(n-1)(2n-1) = 6 \times \frac{4}{3}n(n-1)(n-2) + 3 \times 4n(n-1)$$



- 2 $p = OP$, $q = OQ$, $r = OR$ とおき, $\triangle OPQ$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} PQ^2 &= p^2 + q^2 - 2pq \cos 60^\circ \\ &= p^2 + q^2 - pq \end{aligned}$$

同様に, $\triangle OQR$, $\triangle ORP$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} QR^2 &= q^2 + r^2 - qr, \\ RP^2 &= r^2 + p^2 - rp \end{aligned}$$

$PQ = QR$ であるから

$$p^2 + q^2 - pq = q^2 + r^2 - qr \quad \text{ゆえに} \quad (p-r)(p-q+r) = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

また, $QR = RP$ であるから $(q-p)(q-r+p) = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$

①において, $r \neq p$ とすると, $q = p+r$ となり, これを ② に代入すると

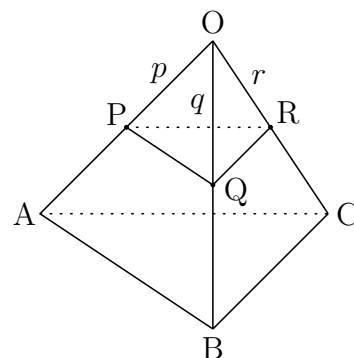
$$(p+r-p)(p+r-r+p) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad pr = 0$$

このとき, $p = 0$ または $r = 0$ となり, 不適. したがって $r = p$

$r = p$ を ② に代入すると $q(q-p) = 0$ すなわち $p = q$

$p = q = r$ であるから $OA : OP = OB : OQ = OC : OR$

よって, 3 辺 PQ , QR , RP はそれぞれ 3 辺 AB , BC , CA に平行である. ■



3 $x + y = t$ とおくと, 条件 $x^2 + xy + y^2 = 6$ より

$$xy = (x + y)^2 - (x^2 + xy + y^2) = t^2 - 6$$

x, y を解とする λ に関する 2 次方程式は

$$\lambda^2 - t\lambda + t^2 - 6 = 0$$

この方程式は, 実数解をもつから, 係数について

$$(-t)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (t^2 - 6) \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad t^2 - 8 \leq 0$$

これを解いて $-2\sqrt{2} \leq t \leq 2\sqrt{2}$

したがって

$$\begin{aligned} x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y &= xy(x + y) - (x + y)^2 + (x + y) \\ &= (t^2 - 6)t - t^2 + t \\ &= t^3 - t^2 - 5t \end{aligned}$$

$f(t) = t^3 - t^2 - 5t$ ($-2\sqrt{2} \leq t \leq 2\sqrt{2}$) とおくと

$$f'(t) = 3t^2 - 2t - 5 = (t + 1)(3t - 5)$$

t	$-2\sqrt{2}$	$\dots$	-1	$\dots$	$\frac{5}{3}$	$\dots$	$2\sqrt{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$$f(-2\sqrt{2}) = -8 - 6\sqrt{2} = -8 - \sqrt{72} < -16$$

$$f(-1) = 3$$

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{175}{27} > -7$$

$$f(2\sqrt{2}) = -8 + 6\sqrt{2} = -8 + \sqrt{72} < 1$$

よって, 求める値の範囲は $-8 - 6\sqrt{2} \leq f(t) \leq 3$ ■

- 4 (p) 正 n 角形の頂点から 3 点を選んで作る最小の内角は $\frac{180^\circ}{n}$
したがって、正 n 角形の頂点から 3 点を選んで作る内角は

$$\frac{180^\circ}{n} \times k \quad (k \text{ は自然数})$$

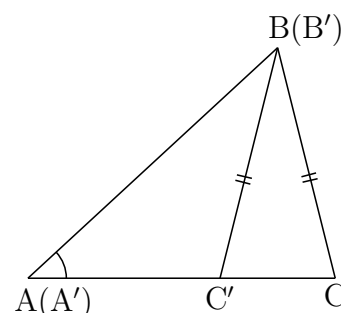
条件を満たすとき $\frac{180^\circ}{n} \times k = 60^\circ$ ゆえに $n = 3k$

上式から、 n は 3 の倍数である。よって、本命題は真である。

- (q) 右の図のように、 $C \neq 90^\circ$ の $\triangle ABC$ について、直線 AC 上に $BC = BC'$ をみたす異なる 2 点 C, C' がとれる。
このとき、 $A' = A, B' = B$ とすると

$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad \angle A = \angle A'$$

一方、 $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ は合同ではない。
よって、本命題は偽である。



- 5 $\cos a\theta = \cos b\theta \cdots (*)$ は、 $a = b$ のとき、 $(*)$ を満たす θ が無数にあるので不適。

(*) より
$$\sin \frac{a+b}{2}\theta \sin \frac{a-b}{2}\theta = 0$$

$a > 0, b > 0, a \neq b$ であるから、 k, l を自然数とすると

$$\frac{a+b}{2}\theta = k\pi \quad \text{または} \quad \frac{|a-b|}{2}\theta = l\pi$$

したがって
$$\theta = \frac{2k}{a+b}\pi \quad \text{または} \quad \theta = \frac{2l}{|a-b|}\pi$$

$(*)$ を満たす θ ($0 < \theta \leq \pi$) がちょうど 1 つであるから

$$\frac{2}{a+b}\pi \leq \pi < \frac{4}{a+b}\pi, \quad \pi < \frac{2}{|a-b|}\pi$$

すなわち $0 < |a-b| < 2 \leq a+b < 4$

よって、求める領域は、右の図の斜線部分で、境界は実線を含み、点線および白丸は含まない。

