

平成23年度 京都大学 2次試験前期日程 (数学問題)120分
総合人間 (文系), 文, 教育 (文系), 法, 経済 (文系)

問題 1 2 3 4 5

1 次の各問に答えよ.

- (1) 辺 AB, 辺 BC, 辺 CA の長さがそれぞれ 12, 11, 10 の三角形 ABC を考える. $\angle A$ の 2 等分線と辺 BC の交点を D とするとき, 線分 AD の長さを求めよ.
- (2) 箱の中に, 1 から 9 までの番号を 1 つずつ書いた 9 枚のカードが入っている. ただし, 異なるカードには異なる番号が書かれているものとする. この箱から 2 枚のカードを同時に選び, 小さいほうの数を X とする. これらのカードを箱に戻して, 再び 2 枚のカードを同時に選び, 小さいほうの数を Y とする. $X = Y$ である確率を求めよ.

2 四面体 OABC において, 点 O から 3 点 A, B, C を含む平面に下ろした垂線とその平面の交点を H とする. $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{AC}$, $|\overrightarrow{OA}| = 2$, $|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 3$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7}$ のとき, $|\overrightarrow{OH}|$ を求めよ.

3 実数 a が変化するとき, 3 次関数 $y = x^3 - 4x^2 + 6x$ と直線 $y = x + a$ のグラフの交点の個数はどのように変化するか. a の値によって分類せよ.

4 xy 平面上で, 連立不等式

$$\begin{cases} |x| \leq 2, \\ y \geq x, \\ y \leq \left| \frac{3}{4}x^2 - 3 \right| - 2 \end{cases}$$

を満たす領域の面積を求めよ.

5 0 以上の整数を 10 進法で表すとき, 次の問いに答えよ. ただし, 0 は 0 桁の数と考えることにする. また n は正の整数とする.

- (1) 各桁の数が 1 または 2 である n 桁の整数を考える. それらすべての整数の総和を T_n とする. T_n を n を用いて表せ.
- (2) 各桁の数が 0, 1, 2 のいずれかである n 桁以下の整数を考える. それらすべての整数の総和を S_n とする. S_n が T_n の 15 倍以上になるのは, n がいくつ以上のときか. 必要があれば, $0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$ および $0.477 < \log_{10} 3 < 0.478$ を用いてもよい.

解答例

- 1 (1) $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$\cos B = \frac{12^2 + 11^2 - 10^2}{2 \cdot 12 \cdot 11} = \frac{5}{8}$$

AD は $\angle A$ の 2 等分線であるから

$$BD : DC = AB : AC = 6 : 5$$

$$\text{ゆえに } BD = \frac{6}{6+5} BC = \frac{6}{11} \cdot 11 = 6$$

$\triangle ABD$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} AD^2 &= AB^2 + BD^2 - 2 \cdot AB \cdot BD \cos B \\ &= 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \frac{5}{8} = 90 \end{aligned}$$

$$AD > 0 \text{ であるから } AD = 3\sqrt{10}$$

補足 $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD$

$$(2) \ 1 \leq k \leq 8 \text{ とすると } P(X \geq k) = \frac{{}_{9-k+1}C_2}{{}_9C_2} = \frac{{}_{10-k}C_2}{{}_9C_2} = \frac{(10-k)(9-k)}{72}$$

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(X \geq k) - P(X \geq k+1) \\ &= \frac{(10-k)(9-k)}{72} - \frac{(9-k)(8-k)}{72} = \frac{9-k}{36} \end{aligned}$$

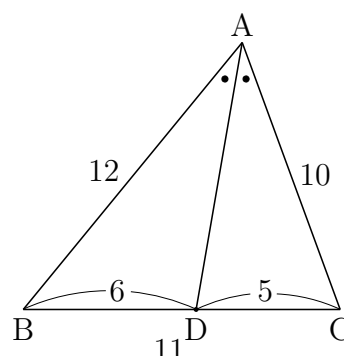
したがって、 $X = Y$ である確率は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 \left(\frac{9-k}{36} \right)^2 &= \frac{1}{36^2} \sum_{k=1}^8 (9-k)^2 = \frac{1}{36^2} \sum_{k=1}^8 k^2 \\ &= \frac{1}{36^2} \cdot \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 17 = \frac{17}{108} \end{aligned}$$

別解 9 枚のカードから 2 枚を同時に選ぶ総数は ${}_9C_2 = 36$ (通り)

小さいほうの数を k とすると ($1 \leq k \leq 8$)、大きいほうの数は $k+1$ から 9 までの $9-k$ 通りあるから

$$P(X = k) = \frac{9-k}{36}$$



2 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおく. $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OC}$ より

$$\vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{a}, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

$$|\overrightarrow{OA}| = 2, \quad |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 3 \quad \text{より} \quad |\vec{a}| = 2, \quad |\vec{b}| = |\vec{c}| = 3$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7} \quad \text{より,} \quad |\vec{b} - \vec{a}|^2 = 7 \quad \text{であるから} \quad |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = 7$$

$$\text{ゆえに} \quad 3^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2^2 = 7 \quad \text{すなわち} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 3$$

$$\overrightarrow{OH} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \quad \text{とおくと} \quad x + y + z = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OH} \quad \text{より} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OH} &= (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{a}|^2)x + (|\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b})y + (\vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{a})z \\ &= -x + 6y - 3z = 0 \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{OH} \quad \text{より} \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OH} &= (\vec{c} - \vec{a}) \cdot (x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}) \\ &= (\vec{c} \cdot \vec{a} - |\vec{a}|^2)x + (\vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b})y + (|\vec{c}|^2 - \vec{c} \cdot \vec{a})z \\ &= -x - 3y + 6z = 0 \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ を解いて} \quad x = \frac{3}{5}, \quad y = z = \frac{1}{5} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{OH} = \frac{1}{5}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$\begin{aligned} |3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 &= 9|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 6\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= 9 \cdot 2^2 + 3^2 + 3^2 + 6 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 6 \cdot 3 = 90 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad |\overrightarrow{OH}| = \frac{1}{5}|3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \frac{1}{5}\sqrt{90} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

別解 O を通り, 平面 OBC に垂直な直線を ℓ とする. $\overrightarrow{OA}$ が $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, ℓ となす角をそれぞれ α , β , γ とすると, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ であるから

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1}{2}, \quad \cos \beta = \frac{\vec{c} \cdot \vec{a}}{|\vec{c}||\vec{a}|} = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad |\cos \gamma| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{四面体 OABC の体積 } V \text{ は} \quad V = \frac{1}{3} \triangle OBC \cdot OA |\cos \gamma| = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\text{また} \quad |\overrightarrow{AB}|^2 = 7, \quad |\overrightarrow{AC}|^2 = |\vec{c} - \vec{a}|^2 = |\vec{c}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2 = 7$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2 = -2$$

$$\text{ゆえに} \quad \triangle ABC = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{7 \cdot 7 - (-2)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \triangle ABC |\overrightarrow{OH}| \quad \text{より} \quad \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2} |\overrightarrow{OH}| \quad \text{よって} \quad |\overrightarrow{OH}| = \frac{3\sqrt{10}}{5} \quad \blacksquare$$

- 3** 求める交点の個数は，3次関数 $y = x^3 - 4x^2 + 5x$ と直線 $y = a$ のグラフの交点の個数に一致する． $y = x^3 - 4x^2 + 5x$ を微分すると

$$y' = 3x^2 - 8x + 5 = (x - 1)(3x - 5)$$

この関数の増減表は，次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{50}{27}$	$\nearrow$

よって，求める共有点の個数は

$$\begin{cases} a < \frac{50}{27}, 2 < a \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ a = \frac{50}{27}, 2 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ \frac{50}{27} < a < 2 \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \end{cases}$$



4 求める領域の面積は、領域

$$(*) \begin{cases} |x| \leq 2, \\ y \geq x + 2, \\ y \leq \left| \frac{3}{4}x^2 - 3 \right| \end{cases}$$

の面積に等しい. $(*)$ の第 1 式から $-2 \leq x \leq 2$

このとき, $\frac{3}{4}x^2 - 3 = \frac{3}{4}(x^2 - 4) \leq 0$ であるから

$$y \leq \left| \frac{3}{4}x^2 - 3 \right| = -\frac{3}{4}x^2 + 3$$

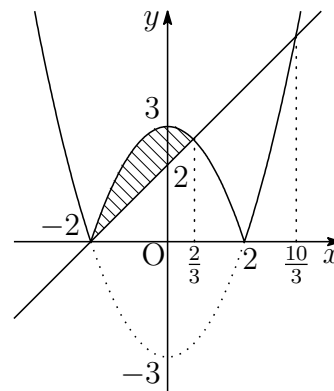
$y = -\frac{3}{4}x^2 + 3$ と $y = x + 2$ の交点の x 座標は

$$-\frac{3}{4}x^2 + 3 = x + 2 \quad \text{ゆえに} \quad (x + 2)(3x - 2) = 0$$

$-2 \leq x \leq 2$ に注意してこれを解くと $x = -2, \frac{2}{3}$

したがって、図の斜線部分が求める面積で、その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{\frac{2}{3}} \left\{ -\frac{3}{4}x^2 + 3 - (x + 2) \right\} dx \\ &= -\frac{3}{4} \int_{-2}^{\frac{2}{3}} (x + 2) \left(x - \frac{2}{3} \right) dx \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3} + 2 \right)^3 = \frac{64}{27} \end{aligned}$$



■

- 5** (1) 各桁の数が1または2である n 桁の整数の個数は 2^n

したがって、各桁の数の和は $2^n \cdot \frac{1+2}{2} = 3 \cdot 2^{n-1}$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad T_n &= 3 \cdot 2^{n-1} \sum_{k=1}^n 10^{k-1} = 3 \cdot 2^{n-1} \times \frac{10^n - 1}{10 - 1} \\ &= \frac{2^{n-1}(10^n - 1)}{3} \end{aligned}$$

- (2) 各桁の数が0, 1, 2である n 桁以下の整数の個数は 3^n

したがって、各桁の数の和は $3^n \cdot \frac{0+1+2}{3} = 3^n$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad S_n &= 3^n \sum_{k=1}^n 10^{k-1} = 3^n \times \frac{10^n - 1}{10 - 1} \\ &= 3^{n-2}(10^n - 1) \end{aligned}$$

これと (1) の結果により $\frac{S_n}{T_n} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

S_n が T_n の15倍以上となるとき $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \geq 15$

両辺の常用対数をとると $(n-1) \log_{10} \frac{3}{2} \geq 1 + \log_{10} \frac{3}{2} \quad \dots \textcircled{1}$

$0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$, $0.477 < \log_{10} 3 < 0.478$ であるから

$\log_{10} \frac{3}{2} = \log_{10} 3 - \log_{10} 2$ より

$$\frac{1}{6} < 0.175 < \log_{10} \frac{3}{2} < 0.177 < \frac{1}{5} \quad \text{ゆえに} \quad 5 < \frac{1}{\log_{10} \frac{3}{2}} < 6 \quad \dots \textcircled{2}$$

①より $n-1 \geq \frac{1}{\log_{10} \frac{3}{2}} + 1$ ゆえに $n \geq \frac{1}{\log_{10} \frac{3}{2}} + 2$

②より、上式を満たすのは n が8以上のときである。 ■