

平成22年度 京都大学 2次試験前期日程 (数学問題)120分
総合人間 (文系), 文, 教育 (文系), 法, 経済 (文系)

問題 1 2 3 4 5

1 次の各問に答えよ.

- (1) 座標平面上で, 点 $(1, 2)$ を通り傾き a の直線と放物線 $y = x^2$ によって囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする. a が $0 \leq a \leq 6$ の範囲を変化するとき, $S(a)$ を最小にするような a の値を求めよ.
- (2) $\triangle ABC$ において $AB = 2$, $AC = 1$ とする. $\angle BAC$ の二等分線と辺 BC の交点を D とする. $AD = BD$ となるとき, $\triangle ABC$ の面積を求めよ.

2 座標平面上の点 $P(x, y)$ が $4x + y \leq 9$, $x + 2y \geq 4$, $2x - 3y \geq -6$ の範囲を動くとき, $2x + y$, $x^2 + y^2$ のそれぞれの最大値と最小値を求めよ.

3 1 から 5 までの自然数を 1 列に並べる. どの並べかたも同様の確からしさで起こるものとする. このとき 1 番目と 2 番目と 3 番目の数の和と, 3 番目と 4 番目と 5 番目の数の和が等しくなる確率を求めよ. ただし, 各並べかたにおいて, それぞれの数字は重複なく 1 度ずつ用いるものとする.

4 点 O を中心とする正十角形において, A, B を隣接する 2 つの頂点とする. 線分 OB 上に $OP^2 = OB \cdot PB$ を満たす点 P をとるとき, $OP = AB$ が成立することを示せ.

5 座標空間内で, $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $D(0, 0, 1)$, $E(1, 0, 1)$, $F(1, 1, 1)$, $G(0, 1, 1)$ を頂点にもつ立方体を考える.

- (1) 頂点 A から対角線 OF に下ろした垂線の長さを求めよ.
- (2) この立方体を対角線 OF を軸にして回転させて得られる回転体の体積を求めよ.

解答例

- 1 (1) 点 (1, 2) を通り, 傾き a の直線は ($0 \leq a \leq 6$)

$$y = a(x - 1) + 2$$

この直線と放物線 $y = x^2$ の方程式から y を消去すると

$$x^2 - ax + a - 2 = 0$$

この 2 次方程式の解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると

$$\alpha = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4a + 8}}{2}, \quad \beta = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4a + 8}}{2}$$

ゆえに $\beta - \alpha = \sqrt{a^2 - 4a + 8} = \sqrt{(a - 2)^2 + 4}$

$S(a)$ は, 右の図の斜線部分であるから, x^2 の係数に注意して

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{\alpha}^{\beta} \{a(x - 1) + 2 - x^2\} dx = - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6}\{(a - 2)^2 + 4\}^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

よって, $S(a)$ は $a = 2$ のとき, 最小値を $\frac{4}{3}$ をとる.

- (2) 線分 AD は $\angle BAC$ の二等分線であるから,
 $AB : AC = BD : CD$ より $BD : CD = 2 : 1$
 $AD = BD$ であるから, $CD = x$ とすると

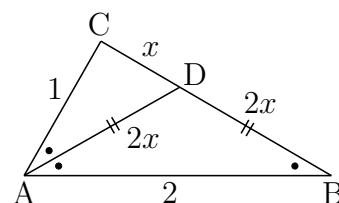
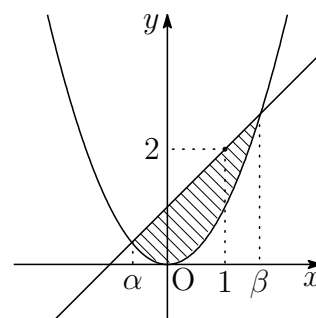
$$AD = BD = 2x, \quad BC = 3x$$

$\triangle ABC \sim \triangle DAC$ であるから $BC : CA = AC : CD$

ゆえに $3x : 1 = 1 : x$ これを解いて $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

したがって $BC = 3x = \sqrt{3}$

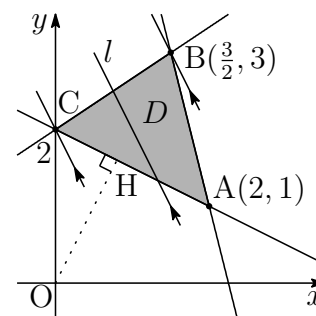
$$C = 90^\circ \text{ となるから } \triangle ABC = \frac{1}{2}BC \cdot CA = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



2 $4x + y \leq 9$, $x + 2y \geq 4$, $2x - 3y \geq -6$ が表す領域を D とすると, D は 3 点 $A(2, 1)$, $B(\frac{3}{2}, 3)$, $C(0, 2)$ を頂点とする $\triangle ABC$ の周および内部である.

D と共有点をもつ直線 $2x + y = k$ を l とすると, l が点 $B(\frac{3}{2}, 3)$ を通るとき, k は最大となり, l が点 $C(0, 2)$ を通るとき, k は最小となる.

よって $2x + y$ の最大値は **6**, 最小値は **2**



$x^2 + y^2$ は原点からの距離の 2 乗であり, これが最大のとなるのは 3 点 A , B , C に限られる.

$$OA^2 = 2^2 + 1^2 = 5, \quad OB^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3^2 = \frac{45}{4}, \quad OC^2 = 0^2 + 2^2 = 4$$

よって $x^2 + y^2$ の最大値は $\frac{45}{4}$

また, $x^2 + y^2$ が最小となる点は, 上の図から線分 $CA : x + 2y = 4$ ($1 \leq y \leq 2$) 上にあるから

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (4 - 2y)^2 + y^2 \\ &= 5y^2 - 16y + 16 \\ &= 5\left(y - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{16}{5} \end{aligned}$$

$y = \frac{8}{5}$, すなわち, 点 $\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ のとき, $x^2 + y^2$ は最小値 $\frac{16}{5}$ をとる.

補足 原点 O から直線 $x + 2y - 4 = 0$ に引いた垂線 OH の長さは

$$OH = \frac{|-4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \quad \text{ゆえに} \quad OH^2 = \frac{16}{5}$$

ただし, $H\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ が線分 CA 上にあることを確認する必要がある. ■

3 k 番目の数を a_k とすると ($k = 1, 2, 3, 4, 5$)

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 15$$

$$a_4 + a_5 = a_1 + a_2 \text{ であるから } 2(a_1 + a_2) + a_3 = 15$$

a_3 は奇数あるから, $a_1 + a_2 = a_4 + a_5$ の組合せは次のようになる.

$$(i) \ a_3 = 1 \text{ のとき } 2 + 5 = 3 + 4$$

$$(ii) \ a_3 = 3 \text{ のとき } 1 + 5 = 2 + 4$$

$$(iii) \ a_3 = 5 \text{ のとき } 1 + 4 = 2 + 3$$

(i) のとき, (a_1, a_2, a_4, a_5) の組合せの総数は $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ (通り)

(ii), (iii) の場合も同様であるから, 求める確率は $\frac{3 \cdot 8}{5!} = \frac{1}{5}$ ■

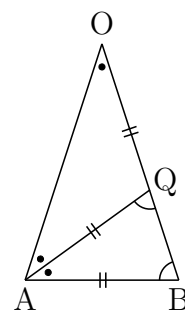
4 $\angle AOB = 36^\circ$, $\angle OAB = \angle OBA = 72^\circ$

右の図のように, $\angle OAB$ の二等分線 AQ を引くと

$$\triangle OAB \sim \triangle ABQ \text{ より } \frac{AB}{OA} = \frac{BQ}{AB}$$

$$\frac{AB}{OA} = r \text{ とすると, } \frac{BQ}{AB} = \frac{1-r}{r} \text{ であるから}$$

$$r = \frac{1-r}{r} \text{ ゆえに } r^2 + r - 1 = 0$$



$$r > 0 \text{ に注意してこれを解くと } r = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{OP}{OB} = x \text{ とすると } \frac{OP}{PB} = \frac{x}{1-x}, \text{ 条件より } \frac{OP^2}{OB \cdot PB} = 1 \text{ であるから}$$

$$\frac{x^2}{1-x} = 1 \text{ ゆえに } x^2 + x - 1 = 0 \text{ すなわち } x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$x = r \text{ であるから } \frac{OP}{OB} = \frac{AB}{OA} \text{ よって } OP = AB \text{ ■}$$

5 (1) $\vec{OA} = (1, 0, 0)$, $\vec{OF} = (1, 1, 1)$ より

$$\frac{\sqrt{|\vec{OA}|^2 |\vec{OF}|^2 - (\vec{OA} \cdot \vec{OF})^2}}{|\vec{OF}|} = \frac{\sqrt{1^2 (\sqrt{3})^2 - 1^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

- (2) 線分 OF 上の点 $P(t, t, t)$ を通り, OF に垂直な平面と直線 OA との交点を $Q(q, 0, 0)$ とすると ($0 \leq q \leq 1$), $\overrightarrow{OF} \perp \overrightarrow{PQ}$ であるから

$$1(q - t) + 1(-t) + 1(-t) = 0$$

$$\text{ゆえに } q = 3t, \quad \left(0 \leq t \leq \frac{1}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (2t, -t, -t), \quad |\overrightarrow{PQ}|^2 = 6t^2$$

$P(t, t, t)$ を通り, OF に垂直な平面と直線 AB との交点を $R(1, r, 0)$ とすると ($0 \leq r \leq 1$), $\overrightarrow{OF} \perp \overrightarrow{PR}$ であるから

$$1(1 - t) + 1(r - t) + 1(-t) = 0 \quad \text{ゆえに } r = 3t - 1 \quad \left(\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{PR} = (1 - t, 2t - 1, -t), \quad |\overrightarrow{PR}|^2 = 6t^2 - 6t + 2$$

$P(t, t, t)$ を通り, OF に垂直な平面と直線 BF との交点を $S(1, 1, s)$ とすると ($0 \leq s \leq 1$), $\overrightarrow{OF} \perp \overrightarrow{PS}$ であるから

$$1(1 - t) + 1(1 - t) + 1(s - t) = 0 \quad \text{ゆえに } s = 3t - 2 \quad \left(\frac{2}{3} \leq t \leq 1\right)$$

$$\overrightarrow{PS} = (1 - t, 1 - t, 2t - 2), \quad |\overrightarrow{PS}|^2 = 6(t - 1)^2$$

$$\text{ここで } d^2 = \begin{cases} 6t^2 & (0 \leq t \leq \frac{1}{3}) \\ 6t^2 - 6t + 2 & (\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}) \\ 6(t - 1)^2 & (\frac{2}{3} \leq t \leq 1) \end{cases} \quad \text{とおくと, } d^2 \text{ は } t = \frac{1}{2} \text{ に関し}$$

て対称である. $u = OP$ とおくと, $u = \sqrt{3}t$ より

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{3} \quad \begin{array}{c|c} u & 0 \longrightarrow \sqrt{3} \\ \hline t & 0 \longrightarrow 1 \end{array}$$

求める体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\sqrt{3}} d^2 du = \sqrt{3}\pi \int_0^1 d^2 dt \\ &= 2\sqrt{3}\pi \int_0^{\frac{1}{3}} 6t^2 dt + 2\sqrt{3}\pi \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \left\{ 6\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \right\} dt \\ &= 2\sqrt{3}\pi \left[2t^3 \right]_0^{\frac{1}{3}} + 2\sqrt{3}\pi \left[2\left(t - \frac{1}{2}\right)^3 + \frac{t}{2} \right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi \end{aligned}$$

■

