

平成 20 年度 京都大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
総合人間 (文系), 文, 教育 (文系), 法, 経済 (文系)

問題 1 2 3 4 5

- 1 実数 a, b, c に対して $f(x) = ax^2 + bx + c$ とする. このとき

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)\{f'(x)\}^2 dx \leq 6 \int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 dx$$

であることを示せ.

- 2 $AB = AC$ である二等辺三角形 ABC を考える. 辺 AB の中点を M とし, 辺 AB を延長した直線上に点 N を, $AN : NB = 2 : 1$ となるようにとる. このとき $\angle BCM = \angle BCN$ となることを示せ. ただし, 点 N は辺 AB 上にはないものとする.

- 3 定数 a は実数であるとする. 方程式

$$(x^2 + ax + 1)(3x^2 + ax - 3) = 0$$

を満たす実数 x はいくつあるか. a の値によって分類せよ.

- 4 $0 \leq x < 2\pi$ のとき, 方程式

$$2\sqrt{2}(\sin^3 x + \cos^3 x) + 3 \sin x \cos x = 0$$

を満たす x の個数を求めよ.

- 5 正 n 角形とその外接円を合わせた図形を F とする. F 上の点 P に対して, 始点と終点がともに P であるような, 図形 F の一筆がきの経路の数を $N(P)$ で表す. 正 n 角形の頂点をひとつとって A とし, $a = N(A)$ とおく. また正 n 角形の辺をひとつとってその中点を B とし, $b = N(B)$ とおく. このとき a と b を求めよ.

注: 一筆がきとは, 図形をかき始めから終わりまで, 筆を紙からはなさず, また同じ線上を通らずにかくことである.

解答例

$$\boxed{1} \quad f(x) = ax^2 + bx + c \text{ より, } f'(x) = 2ax + b$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-x^2)\{f'(x)\}^2 dx &= \int_{-1}^1 (1-x^2)(2ax+b)^2 dx \\ &= \int_{-1}^1 (1-x^2)(4a^2x^2 + 4abx + b^2) dx \\ &= \int_{-1}^1 (1-x^2)(4a^2x^2 + b^2) dx \\ &= \int_{-1}^1 (1-x^2)\{4a^2(x^2-1) + 4a^2 + b^2\} dx \\ &= -4a^2 \int_{-1}^1 (x+1)^2(1-x)^2 dx \\ &\quad + (4a^2 + b^2) \int_{-1}^1 (x+1)(1-x) dx \\ &= -4a^2 \cdot \frac{2!2! \cdot 2^5}{5!} + (4a^2 + b^2) \cdot \frac{2^3}{6} = \frac{16}{15}a^2 + \frac{4}{3}b^2 \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 dx &= 6 \int_{-1}^1 (ax^2 + bx + c)^2 dx \\ &= 12 \int_0^1 \{a^2x^4 + (b^2 + 2ac)x^2 + c^2\} dx \\ &= 12 \left[\frac{a^2}{5}x^5 + \frac{1}{3}(b^2 + 2ac)x^3 + c^2x \right]_0^1 \\ &= \frac{12}{5}a^2 + 4b^2 + 8ac + 12c^2 \quad \cdots (**) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad (**) - (*) &= \frac{12}{5}a^2 + 4b^2 + 8ac + 12c^2 - \left(\frac{16}{15}a^2 + \frac{4}{3}b^2 \right) \\ &= \frac{4}{3}a^2 + \frac{8}{3}b^2 + 8ac + 12c^2 \\ &= \frac{4}{3}(a+3c)^2 + \frac{8}{3}b^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad \int_{-1}^1 (1-x^2)\{f'(x)\}^2 dx \leq 6 \int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 dx$$

補足 次の公式¹に $m=2$, $n=2$, $\alpha=-1$, $\beta=1$ を代入する.

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m(\beta-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

■

¹<http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai-tech.2010.kouki.pdf> の $\boxed{1}$ を参照.

2 辺 AC の中点を L とする.

$\triangle ABC$ は二等辺三角形であるから

$$\angle MBC = \angle LCB, \quad MB = LC$$

$\triangle MBC$ と $\triangle LCB$ において, BC は共通より

$$\triangle MBC \equiv \triangle LCB$$

したがって $\angle BCM = \angle CBL \quad \dots \textcircled{1}$

2 点 M, L は 2 辺 AB, AC のそれぞれの中点であるから, 中点連結定理により

$$ML \parallel BC \quad \text{ゆえに} \quad \angle MLB = \angle CBL \quad \dots \textcircled{2}$$

2 点 B, L は 2 辺 AN, AC のそれぞれの中点であるから, 中点連結定理により

$$BL \parallel NC \quad \text{ゆえに} \quad \angle MLB = \angle BCN \quad \dots \textcircled{3}$$

①～③ より $\angle BCM = \angle BCN$

3 2 つの 2 次方程式

$$\begin{cases} 3x^2 + ax - 3 = 0 & \dots \textcircled{1} \\ x^2 + ax + 1 = 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ② の判別式をそれぞれ D_1, D_2 とすると

$$D_1 = a^2 + 36 > 0, \quad D_2 = a^2 - 4 = (a+2)(a-2)$$

①, ② が共通解をもつとき, これを p とおくと

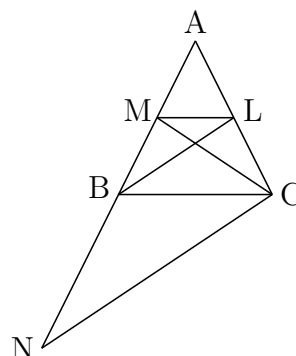
$$3p^2 + ap - 3 = 0, \quad p^2 + ap + 1 = 0$$

上の 2 式から $p = \pm\sqrt{2}, a = \mp\frac{3\sqrt{2}}{2}$ (複号同順)

よって $|a| < 2$ のとき 2 個

$|a| = 2, \frac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき 3 個

$2 < |a| < \frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} < |a|$ のとき 4 個



4 $t = \sin x + \cos x$ とおくと $t = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \quad \cdots \textcircled{1}$

$$t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x \quad \text{ゆえに} \quad \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

また $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)$

$$= t \left(1 - \frac{t^2 - 1}{2} \right) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t$$

方程式

$$2\sqrt{2}(\sin^3 x + \cos^3 x) + 3 \sin x \cos x = 0 \quad \cdots (*)$$

を t を用いて表すと

$$2\sqrt{2} \left(-\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t \right) + 3 \cdot \frac{t^2 - 1}{2} = 0$$

整理すると $2\sqrt{2}t^3 - 3t^2 - 6\sqrt{2}t + 3 = 0$

$f(t) = 2\sqrt{2}t^3 - 3t^2 - 6\sqrt{2}t + 3$ とおくと

$$f'(t) = 6\sqrt{2}t^2 - 6t - 6\sqrt{2} = 6(\sqrt{2}t + 1)(t - \sqrt{2})$$

① より, $0 \leq x < 2\pi$ のとき $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

このとき, $f(t)$ の増減表は

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$	1	$\nearrow$	$\frac{13}{2}$	$\searrow$	-7

増減表から, $f(t) = 0$ を満たす t は $-\frac{1}{\sqrt{2}} < t < \sqrt{2}$ にただ 1 つ存在する.

① から, $(*)$ を満たす x の個数は **2 個**



5 正 n 角形の頂点を図のように A_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) とし, $A = A_0$ とする.

- A_0 から A_k ($k = 1, 2, \dots, n-1$) まで時計回りに回転した後, 反時計回りに A_k まで回転し, さらに時計回りに A_0 まで回転する経路と, その逆の経路の総数は

$$(n-1) \times 2^n \times 2 = (n-1)2^{n+1}$$

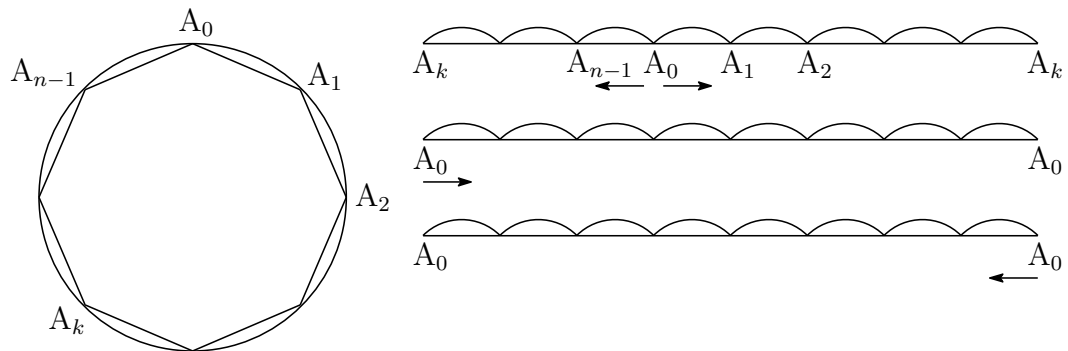
- A_0 から A_0 まで時計回りに 1 周し, その後反時計回りに 1 周または時計回り 1 周して A_0 に戻る場合の経路の数は

$$2^n \times 2 = 2^{n+1}$$

- A_0 から A_0 まで反時計回りに 1 周し, その後時計回りに 1 周または反時計回り 1 周して A_0 に戻る場合の経路の数は

$$2^n \times 2 = 2^{n+1}$$

よって $a = (n-1)2^{n+1} + 2^{n+1} + 2^{n+1} = (n+1)2^{n+1}$



B を辺 A_0A_1 の中点とすると, A_0, A_1 を始点・終点とする一筆がきの総数を求めればよい.

- A_0 から A_k ($k = 1, 2, \dots, n-1$) まで時計回りに回転した後, 反時計回りに A_k まで回転し, さらに反時計回りに A_1 まで回転する経路と, その逆の経路の総数は

$$(n-1) \times 2^{n-1} \times 2 = (n-1)2^n$$

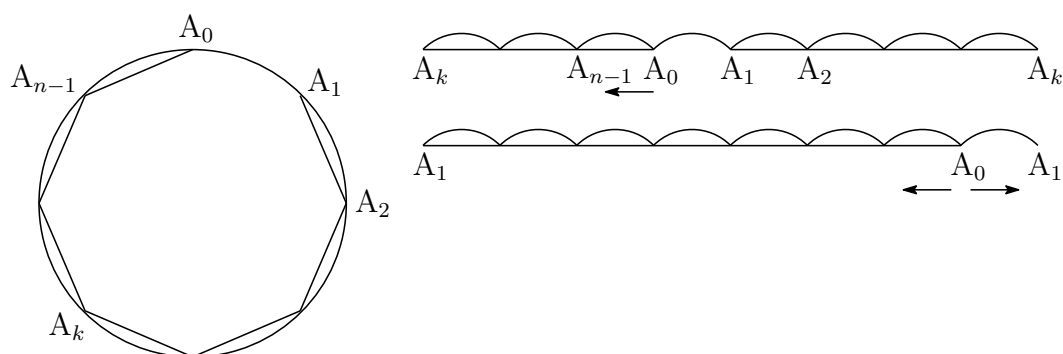
- A_0 から A_0 まで時計回りに 1 周し, その後反時計回りに A_1 まで回転する経路と, その逆の経路の総数は

$$2^{n-1} \times 2 = 2^n$$

- A_0 から A_0 まで反時計回りに 1 周し, さらに反時計回りに A_1 まで回転する経路と, その逆の経路の総数は

$$2^{n-1} \times 2 = 2^n$$

よって $b = (n-1)2^n + 2^n + 2^n = (n+1)2^n$



■