

平成19年度 京都大学 2次試験前期日程(数学問題)120分
総合人間(文系), 文, 教育(文系), 法, 経済(文系)

問題 1 2 3 4 5

1 以下の各問にそれぞれ答えよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき,
 $A^6 + 2A^4 + 2A^3 + 2A^2 + 2A + 3E$ を求めよ.

(2) 四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD を考える. 点 P は時刻 0 では頂点 O にあり, 1 秒ごとに次の規則に従ってこの四角錐の 5 つの頂点のいずれかに移動する.

規則: 点 P のあった頂点と 1 つの辺によって結ばれる頂点の 1 つに,
等しい確率で移動する.

このとき, n 秒後に点 P が頂点 O にある確率を求めよ.

2 3 次関数 $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$ のグラフ上の点 $(1, 0)$ における接線を ℓ とする. この 3 次関数のグラフと接線 ℓ で囲まれた部分を x 軸の周りに回転して立体を作る. その立体の体積を求めよ.

3 p を 3 以上の素数とする. 4 個の整数 a, b, c, d が次の 3 条件

$$a + b + c + d = 0, \quad ad - bc + p = 0, \quad a \geq b \geq c \geq d$$

を満たすとき, a, b, c, d を p を用いて表せ.

4 座標空間で点 $(3, 4, 0)$ を通りベクトル $\vec{a} = (1, 1, 1)$ に平行な直線を ℓ , 点 $(2, -1, 0)$ を通りベクトル $\vec{b} = (1, -2, 0)$ に平行な直線を m とする. 点 P は直線 ℓ 上を, 点 Q は直線 m 上をそれぞれ勝手に動くとき, 線分 PQ の長さの最小値を求めよ.

5 n を 1 以上の整数とするとき, 次の 2 つの命題はそれぞれ正しいか. 正しいときは証明し, 正しくないときはその理由を述べよ.

命題 p : ある n に対して, $\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ は共に有理数である.

命題 q : すべての n に対して, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ は無理数である.

解答例

- 1 (1) ハミルトン・ケーリーの定理を $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ に適用すると

$$A^2 - A + 2E = O$$

したがって

$$\begin{aligned} & A^6 + 2A^4 + 2A^3 + 2A^2 + 2A + 3E \\ &= (A^2 - A + 2E)(A^4 + A^3 + A^2 + A + E) + A + E = A + E \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- (2) 時刻 n で点 P が頂点 O にある確率を p_n とする. 時刻 0 で点 P は頂点 O にあるから, 対称性により, 時刻 n で点 P が 4 頂点 A, B, C, D にある確率は等しく, 点 P が A, B, C, D のそれぞれの頂点にある確率は

$$\frac{1}{4}(1 - p_n)$$

したがって, 次の確率漸化式が成立する.

$$p_{n+1} = 4 \times \frac{1}{4}(1 - p_n) \times \frac{1}{3} \quad \text{ゆえに} \quad p_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3} \left(p_n - \frac{1}{4} \right)$$

$\left\{ p_n - \frac{1}{4} \right\}$ は初項 $p_0 - \frac{1}{4}$, 公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$p_n - \frac{1}{4} = \left(p_0 - \frac{1}{4} \right) \left(-\frac{1}{3} \right)^n \quad \text{よって} \quad p_n = \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right\}$$

■

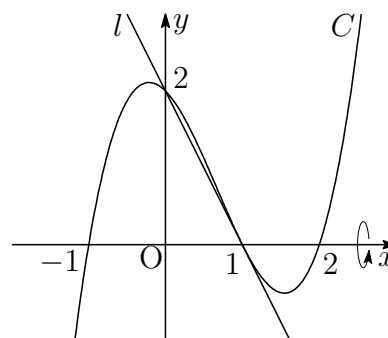
2 $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$ を微分すると

$$y' = 3x^2 - 4x - 1$$

$$x = 1 \text{ のとき } y' = -2$$

曲線 $C : y = x^3 - 2x^2 - x + 2$ 上の点 $(1, 0)$ における接線 l は

$$y = -2(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = -2x + 2$$



$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2, \quad g(x) = -2x + 2 \text{ とおくと}$$

$$f(x) - g(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x - 1)^2,$$

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= f(x) - g(x) + 2g(x) \\ &= x(x - 1)^2 - 4(x - 1) \end{aligned}$$

C と l の共有点の x 座標は $x = 0, 1$

区間 $0 \leq x \leq 1$ において $f(x) \geq g(x) \geq 0$

求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^1 \{f(x)^2 - g(x)^2\} dx \\ &= \int_0^1 \{f(x) + g(x)\} \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \int_0^1 x(x - 1)^2 \{x(x - 1)^2 - 4(x - 1)\} dx \\ &= \int_0^1 \{x^2(1 - x)^4 + 4x(1 - x)^3\} dx \\ &= \frac{2!4!}{7!} + 4 \cdot \frac{1!3!}{5!} = \frac{1}{105} + \frac{1}{5} = \frac{22}{105} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad V = \frac{22}{105} \pi$$

補足 次の公式¹ を利用している.

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx = \frac{m!n!}{(m + n + 1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

■

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech.2010.kouki.pdf の **1** を参照.

$$\boxed{3} \quad a + b + c + d = 0, \quad ad - bc + p = 0, \quad a \geq b \geq c \geq d \quad \cdots (*)$$

(*) の第 1 式から, $d = -(a + b + c)$. これを第 2 式に代入すると

$$-a(a + b + c) - bc + p = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (a + b)(a + c) = p \quad \cdots (**)$$

$$a \geq b \geq c \geq d \text{ より} \quad a + b \geq c + d \quad \cdots (***)$$

(*) の第 1 式より, $c + d = -(a + b)$ を上式に代入すると

$$a + b \geq -(a + b) \quad \text{ゆえに} \quad a + b \geq 0$$

$$(**), (***) \text{ より} \quad a + b = p, \quad a + c = 1$$

したがって, $b = p - a, c = 1 - a$ を (*) の第 1 式に代入すると

$$a + (p - a) + (1 - a) + d = 0 \quad \text{ゆえに} \quad d = a - p - 1$$

(*) の第 3 式により

$$a \geq p - a \geq 1 - a \geq a - p - 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{p}{2} \leq a \leq \frac{p+2}{2}$$

$$p \text{ は奇素数より} \quad a = \frac{p+1}{2}, \quad b = \frac{p-1}{2}, \quad c = -\frac{p-1}{2}, \quad d = -\frac{p+1}{2}$$

別解 $a + b + c + d = 0$, $ad - bc + p = 0$ より $a + d = -(b + c)$, $ad = bc - p$

a, d を解とする 2 次方程式は $x^2 + (b + c)x + (bc - p) = 0$

$$\text{これを解いて} \quad x = \frac{-(b+c) \pm \sqrt{(b+c)^2 - 4(bc-p)}}{2}$$

$a \geq d$ より, $a - d = \sqrt{(b+c)^2 - 4(bc-p)}$ であるから

$$(a-d)^2 = (b+c)^2 - 4(bc-p) \quad \text{ゆえに} \quad (a-d+b+c)(a-d-b+c) = 4p$$

$a-d+b-c = a-d-b+c+2(b-c)$ であるから, $a-d+b-c$ と $a-d-b+c$ の偶奇が一致することに注意して ($a \geq b \geq c \geq d$)

$$a-d+b-c = 2p, \quad a-d-b+c = 2$$

ゆえに $a-d = p+1, \quad b-c = p-1 \quad \dots (*)$

これらを $(a-b) + (b-c) + (c-d) = a-d$ に代入すると

$$(a-b) + p-1 + (c-d) = p+1 \quad \text{ゆえに} \quad (a-b) + (c-d) = 2$$

$c-d = k$ とおくと ($k = 0, 1, 2$), $a-b = 2-k$ であるから, (*) より

$$a = d + p + 1, \quad b = d + p + k - 1, \quad c = d + k$$

これらを $a + b + c + d = 0$ に代入すると

$$(d+p+1) + (d+p+k-1) + (d+k) + d = 0 \quad \text{ゆえに} \quad d = -\frac{p+k}{2}$$

したがって

$$a = \frac{p-k+2}{2}, \quad b = \frac{p+k-2}{2}, \quad c = -\frac{p-k}{2}, \quad d = -\frac{p+k}{2}$$

p は奇素数, a, b, c, d は整数であるから, $k = 1$ より

$$a = \frac{p+1}{2}, \quad b = \frac{p-1}{2}, \quad c = -\frac{p-1}{2}, \quad d = -\frac{p+1}{2}$$



4 s, t を実数とする.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+s \\ 4+s \\ s \end{pmatrix}, \\ \overrightarrow{OQ} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+t \\ -1-2t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -1-s+t \\ -5-s-2t \\ -s \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{PQ}$ が $\vec{a} = (1, 1, 1)$ および $\vec{b} = (1, -2, 0)$ と垂直のとき

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{a} = -3s - t - 6 = 0, \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{b} = s + 5t + 9 = 0$$

このとき，線分 PQ の長さは最小となるから，これを解いて

$$s = t = -\frac{3}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

求める PQ の長さの最小値は $\frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$

■

5 $\sqrt{n}$ が有理数であるとき

$$\sqrt{n} = \frac{p}{q} \quad (p, q \text{ は互いに素な自然数})$$

とおけるから

$$nq^2 = p^2$$

上式より, p^2 は q の倍数であるから $q = 1$

したがって, $\sqrt{n}$ が有理数であるとき, $\sqrt{n}$ は整数である.

また, $\sqrt{n+1}$ が有理数であるときも $\sqrt{n+1}$ も整数である.

命題 p が真であると仮定すると

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \geq 1$$

一方

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < 1$$

よって, 命題 p は偽である.

次に, 命題 q が偽, すなわち

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = r \quad (r \text{ は有理数})$$

を満たす自然数 n が存在すると仮定すると

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{1}{r}$$

上の 2 式から

$$\sqrt{n+1} = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right), \quad \sqrt{n} = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right)$$

このとき, $\sqrt{n+1}$ および $\sqrt{n}$ はともに有理数となる. これは命題 p が偽であることに反する. よって, 命題 q は真である. ■