

平成 15 年度 京都大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 120 分
総合人間 (文系), 文, 教育 (文系), 法, 経済 (文系)

問題 1 2 3 4 5

1 $\frac{23}{111}$ を $0.a_1a_2a_3a_4\cdots$ のように小数で表す. すなわち小数第 k 位の数を a_k とする. このとき $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{3^k}$ を求めよ.

2 xy 平面上で, 放物線 $C: y = x^2 + x$ と, 直線 $l: y = kx + k - 1$ を考える. このとき次の問に答えよ.

- (1) 放物線 C と直線 l が相異なる 2 点で交わるような k の範囲を求めよ.
- (2) 放物線 C と直線 l の 2 つの交点を P, Q とし, 線分 PQ の長さを L , 線分 PQ と放物線とで囲まれる部分の面積を S とする. k が (1) で定まる範囲を動くとき, $\frac{S}{L^3}$ の値のとりうる範囲を求めよ.

3 四面体 $OABC$ は次の 2 つの条件

- (i) $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AB}$
- (ii) 4 つの面の面積がすべて等しい

をみたしている. このとき, この四面体は正四面体であることを示せ.

4 p は 3 以上の素数であり, x, y は $0 \leq x \leq p, 0 \leq y \leq p$ をみたす整数であるとする. このとき x^2 を $2p$ で割った余りと, y^2 を $2p$ で割った余りが等しければ, $x = y$ であることを示せ.

5 4 チームがリーグ戦を行う. すなわち, 各チームは他のすべてのチームとそれぞれ 1 回ずつ対戦する. 引き分けはないものとし, 勝つ確率はすべて $\frac{1}{2}$ で, 各回の勝敗は独立に決まるものとする. 勝ち数の多い順に順位をつけ, 勝ち数が同じであればそれらは同順位とする. 1 位のチーム数の期待値を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad \frac{23}{111} = 0.\dot{2}0\dot{7} \text{ より } a_{3j-2} = 2, \quad a_{3j-1} = 0, \quad a_{3j} = 7 \quad (j \text{ は自然数})$$

まず, $S_m = 1 + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^{3(m-1)}}$ とおくと

$$S_m = \frac{1 - \frac{1}{3^{3m}}}{1 - \frac{1}{3^3}} = \frac{27}{26} \left(1 - \frac{1}{3^{3m}} \right)$$

(i) $n = 3m$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{3^k} &= \frac{a_1}{3} S_m + \frac{a_3}{3^3} S_m \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{27}{26} \left(1 - \frac{1}{3^{3m}} \right) + \frac{7}{3^3} \cdot \frac{27}{26} \left(1 - \frac{1}{3^{3m}} \right) \\ &= \frac{25}{26} \left(1 - \frac{1}{3^{3m}} \right) \end{aligned}$$

(ii) $n = 3m + 1, 3m + 2$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{3^k} &= \frac{a_1}{3} S_{m+1} + \frac{a_3}{3^3} S_m \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{27}{26} \left(1 - \frac{1}{3^{3(m+1)}} \right) + \frac{7}{3^3} \cdot \frac{27}{26} \left(1 - \frac{1}{3^{3m}} \right) \\ &= \frac{25}{26} - \frac{23}{26 \cdot 3^{3m+1}} \end{aligned}$$

$$(i), (ii) \text{ より } \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{3^k} = \begin{cases} \frac{25}{26} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) & (n \equiv 0 \pmod{3}) \\ \frac{25}{26} - \frac{23}{26 \cdot 3^n} & (n \equiv 1 \pmod{3}) \\ \frac{25}{26} - \frac{23}{26 \cdot 3^{n-1}} & (n \equiv 2 \pmod{3}) \end{cases}$$

■

- 2** (1) $C: y = x^2 + x$, $l: y = kx + k - 1$ の方程式から y を消去して整理すると

$$x^2 - (k-1)x - (k-1) = 0 \quad (*)$$

C と l が異なる 2 点で交わるから、方程式 $(*)$ の判別式 D は

$$D = (k-1)^2 + 4(k-1) = (k+3)(k-1) > 0$$

よって $k < -3, 1 < k$

- (2) 方程式 $(*)$ の解を α, β とすると ($\alpha < \beta$)

$$x^2 - (k-1)x - (k-1) = (x-\alpha)(x-\beta)$$

また、交点 P, Q の x 座標をそれぞれ α, β とすると、 $P(\alpha, k\alpha + k - 1)$, $Q(\beta, k\beta + k - 1)$ より

$$L = PQ = (\beta - \alpha)\sqrt{1 + k^2}$$

線分 PQ と放物線 C で囲まれる部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(kx + k - 1) - (x^2 + x)\} dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} \{x^2 - (k-1)x - (k-1)\} dx \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

したがって
$$\frac{S}{L^3} = \frac{1}{6(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(1) の結果より、 $k^2 > 1$ であるから $0 < \frac{1}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{2\sqrt{2}}$

よって
$$0 < \frac{S}{L^3} < \frac{\sqrt{2}}{24}$$



3 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおくと, $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{AC}$ であるから

$$\vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0, \quad \vec{b} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} \quad (*)$$

$\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$ の面積が等しいから

$$\frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{b}|^2 |\vec{c}|^2 - (\vec{b} \cdot \vec{c})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{c}|^2 |\vec{a}|^2 - (\vec{c} \cdot \vec{a})^2}$$

したがって $|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{b}|^2 |\vec{c}|^2 - (\vec{b} \cdot \vec{c})^2 = |\vec{c}|^2 |\vec{a}|^2 - (\vec{c} \cdot \vec{a})^2$

(*) より $|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 = |\vec{b}|^2 |\vec{c}|^2 = |\vec{c}|^2 |\vec{a}|^2 \quad \text{ゆえに} \quad |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$

以上から, O を始点するベクトルを用いて, 次の結果が得られた.

$$OA = OB = OC \quad (**)$$

対称性により, A , B をそれぞれ始点とするベクトルを用いて, 次式を得る.

$$AO = AB = AC, \quad BO = BA = BC \quad (***)$$

(**), (***) より, 四面体のすべての辺の長さが等しいから, 正四面体である. ■

4 x^2 を $2p$ で割った余りと y^2 を $2p$ で割った余りが等しいから (p は奇素数)

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) \equiv 0 \pmod{2p} \quad (*)$$

x, y は $0 \leq x \leq p, 0 \leq y \leq p$ を満たす整数で

$$x + y = (x - y) + 2y$$

であるから, $x + y$ と $x - y$ の偶奇は一致する. さらに (*) より, これらはともに偶数で一方は p も因数にもつから

$$x + y \equiv 0 \quad \text{または} \quad x - y \equiv 0 \pmod{2p}$$

(i) $x + y \equiv 0 \pmod{2p}$ のとき, $0 \leq x + y \leq 2p$ であるから

$$x + y = 0 \quad \text{または} \quad x + y = 2p \quad \text{すなわち} \quad x = y = 0 \quad \text{または} \quad x = y = p$$

(ii) $x - y \equiv 0 \pmod{2p}$ のとき, $-p \leq x - y \leq p$ であるから

$$x - y = 0 \quad \text{すなわち} \quad x = y$$

(i), (ii) より $x = y$ ■

5 4チームを A, B, C, D として, 下の図では矢印の向きを勝者に向け, 勝敗に無関係な対戦については矢印を付けていない.

(i) 1 位が 1 チームの場合 (図では A チーム)

1 位が A であるとき, A は 3 戦全勝し, その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ で, 全勝するチームの場合の数が 4 通りあるから, 1 位が 1 チームである確率は

$$p_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 4 = \frac{1}{2}$$

(ii) 1 位が 2 チームの場合 (図では A, B)

1 位 2 チームを A, B とすると, 2 チームの対戦成績は 2 勝 1 敗である. A は B に勝ち, C に敗れたとすると, 他の勝敗は下の図のように一意的に定まる. 全 6 試合の確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^6$ で, これらに対応する場合の数が 4! 通りあるから, 1 位が 2 チームである確率は

$$p_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times 4! = \frac{3}{8}$$

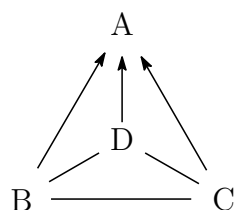
(iii) 1 位が 3 チームの場合 (図では A, B, C)

1 位 3 チームを A, B, C とすると, 3 チームの対戦成績は 2 勝 1 敗である. A は B に勝ち, C に敗れたとすると, 他の勝敗は下の図のように一意的に定まる. 全 6 試合の確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^6$ で, 全敗する D の選び方 4 通りに対し, 1 位 3 チームの選び方は対称性により 2! 通り (円順列) であるから, 1 位が 3 チームである確率は (p_1, p_2 から p_3 を求めてもよい)

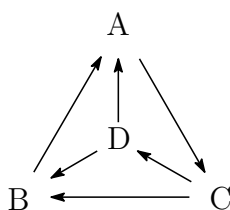
$$p_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times 4 \times 2! = \frac{1}{8}$$

(iv) 全試合数が 6 試合であるから, 1 位が 4 チームになることはない.

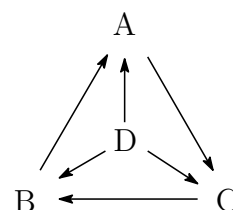
(i) 1 チーム (A)



(ii) 2 チーム (A, B)



(iii) 3 チーム (A, B, C)



よって, 求める期待値は $1p_1 + 2p_2 + 3p_3 = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{13}{8}$ ■