

平成 14 年度 京都大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 120 分
総合人間 (文系), 文, 教育 (文系), 法, 経済 (文系)

問題 1 2 3 4 5

- 1 数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n と表す. この数列が

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad (n-1)^2 a_n = S_n \quad (n \geq 1)$$

を満たすとき, 一般項 a_n を求めよ.

- 2 四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD は

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$$

を満たしており, 0 と異なる 4 つの実数 p, q, r, s に対して 4 点 P, Q, R, S を

$$\overrightarrow{OP} = p\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OQ} = q\overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OR} = r\overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{OS} = s\overrightarrow{OD}$$

によって定める. このとき P, Q, R, S が同一平面上にあれば

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{s}$$

が成立することを示せ.

- 3 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ は整数を係数とする x の 4 次式とする. 4 次方程式 $f(x) = 0$ の重解も込めた 4 つの解のうち, 2 つは整数で残りの 2 つは虚数であるという. このとき a, b, c の値を求めよ.

- 4 $0 \leq \theta < 360$ とし, a は定数とする.

$$\cos 3\theta^\circ - \cos 2\theta^\circ + 3 \cos \theta^\circ - 1 = a$$

を満たす θ の値はいくつあるか. a の値によって分類せよ.

- 5 4 個の整数 $1, a, b, c$ は $1 < a < b < c$ を満たしている. これらの中から相異なる 2 個を取り出して和を作ると, $1+a$ から $b+c$ までのすべての整数の値が得られるという. a, b, c の値を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \text{ 漸化式は } \begin{aligned} (n-1)^2 a_n &= S_n & (n \geq 1) & \cdots \textcircled{1} \\ n^2 a_{n+1} &= S_{n+1} \end{aligned}$$

上の2式から、辺々の差をとると、 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ より

$$n^2 a_{n+1} - (n-1)^2 a_n = a_{n+1}$$

$$\begin{aligned} \text{整理すると} \quad & (n+1)(n-1)a_{n+1} = (n-1)^2 a_n \\ n \geq 2 \text{ のとき} \quad & n(n+1)a_{n+1} = (n-1)na_n \end{aligned}$$

$n \geq 2$ のとき、数列 $\{(n-1)na_n\}$ は一定であるから

$$(n-1)na_n = 1 \cdot 2a_2 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad a_n = \frac{2}{n(n-1)}$$

$$\text{よって} \quad a_1 = 0, \quad a_n = \frac{2}{n(n-1)} \quad (n \geq 2)$$



2 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$ とおくと, 条件から $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d} \quad \dots \textcircled{1}$

P, Q, R, S が同一平面上にあるとき, 実数 x, y を用いて

$$\overrightarrow{PS} = x\overrightarrow{PQ} + y\overrightarrow{PR} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OP} = x(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) + y(\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP})$$

$$\text{整理すると} \quad (1 - x - y)\overrightarrow{OP} + x\overrightarrow{OQ} + y\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OS} = \vec{0}$$

これに $\overrightarrow{OP} = p\vec{a}$, $\overrightarrow{OQ} = q\vec{b}$, $\overrightarrow{OR} = r\vec{c}$, $\overrightarrow{OS} = s\vec{d}$ を代入すると

$$(1 - x - y)p\vec{a} + xq\vec{b} + yr\vec{c} - s\vec{d} = \vec{0}$$

① より $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ を上式に代入して整理すると

$$\{(1 - x - y)p - s\}\vec{a} + (xq + s)\vec{b} + (yr - s)\vec{c} = \vec{0}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は線形独立であるから

$$(1 - x - y)p - s = 0, \quad xq + s = 0, \quad yr - s = 0$$

$$\text{したがって} \quad 1 - x - y = \frac{s}{p}, \quad x = -\frac{s}{q}, \quad y = \frac{s}{r}$$

$$x, y \text{ を消去すると} \quad 1 + \frac{s}{q} - \frac{s}{r} = \frac{s}{p} \quad \text{よって} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{s}$$

別解 与えられた条件から

$$\overrightarrow{OA} = \frac{1}{p}\overrightarrow{OP}, \quad \overrightarrow{OB} = \frac{1}{q}\overrightarrow{OQ}, \quad \overrightarrow{OC} = \frac{1}{r}\overrightarrow{OR}, \quad \overrightarrow{OD} = \frac{1}{s}\overrightarrow{OS}$$

これらを $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ に代入すると

$$\frac{1}{p}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{r}\overrightarrow{OR} = \frac{1}{q}\overrightarrow{OQ} + \frac{1}{s}\overrightarrow{OS}$$

$$\text{したがって} \quad \overrightarrow{OS} = \frac{s}{p}\overrightarrow{OP} - \frac{s}{q}\overrightarrow{OQ} + \frac{s}{r}\overrightarrow{OR}$$

S は平面 PQR 上の点であるから

$$\frac{s}{p} - \frac{s}{q} + \frac{s}{r} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{s}$$



3 4次方程式 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ の整数解を n とすると

$$n^4 + an^3 + bn^2 + cn + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad n(n^3 + an^2 + bn + c) = -1$$

a, b, c は整数であるから, $n^3 + an^2 + bn + c$ は整数. 上式より n は ± 1 したがって, $f(x)$ の x^4 の係数および定数項に注意して

$$f(x) = (x \pm 1)^2(x^2 + px + 1) \quad \text{または} \quad f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + qx - 1)$$

(i) $f(x) = (x \pm 1)^2(x^2 + px + 1)$ のとき

$$f(x) = x^4 + (p \pm 2)x^3 + (2 \pm 2p)x^2 + (p \pm 2)x + 1 \quad (\text{複号同順})$$

$$f(x) \text{ の係数から } a = p \pm 2, \quad b = 2 \pm 2p, \quad c = p \pm 2 \quad (\text{複号同順})$$

これらは整数であるから, $p \pm 2$ が整数より, p は整数.

$x^2 + px + 1 = 0$ が虚数解をもつから, 係数について

$$p^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0 \quad \text{これを満たす整数 } p \text{ は } p = 1, 0, -1$$

したがって

$$p = 1, 0, -1, \quad a = p \pm 2, \quad b = 2 \pm 2p, \quad c = p \pm 2 \quad (\text{複号同順})$$

(ii) $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + qx - 1)$ のとき, $x^2 + qx - 1 = 0$ の係数について

$$q^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) > 0 \quad \text{このとき, 虚数解をもたない}$$

よって, 求める (a, b, c) は

$$(a, b, c) = (3, 4, 3), (-1, 0, -1), (2, 2, 2), (-2, 2, -2) \\ (1, 0, 1), (-3, 4, -3)$$



4 (*) $\cos 3\theta^\circ - \cos 2\theta^\circ + 3\cos \theta^\circ - 1 = a \quad (0 \leq \theta < 360)$

$x = \cos \theta^\circ$ とおくと $-1 \leq x \leq 1$

$$\cos 3\theta^\circ = 4x^3 - 3x, \quad \cos 2\theta^\circ = 2x^2 - 1$$

(*) は x を用いて

$$4x^3 - 3x - (2x^2 - 1) + 3x - 1 = a \quad \text{整理すると} \quad 4x^3 - 2x^2 = a$$

$f(x) = 4x^3 - 2x^2$ とおくと $(-1 \leq x \leq 1)$

$$f'(x) = 12x^2 - 4x = 4x(3x - 1)$$

x	-1	...	0	...	$\frac{1}{3}$	...	1
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-6	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{27}$	$\nearrow$	2

よって, (*) を満たす θ の個数は

$a < -6, 2 < a$ のとき 0 個

$a = -6, 2$ のとき 1 個

$-6 < a < -\frac{2}{27}, 0 < a < 2$ のとき 2 個

$a = -\frac{2}{27}, 0$ のとき 4 個

$-\frac{2}{27} < a < 0$ のとき 6 個



5 4個の整数 $1, a, b, c$ は $1 < a < b < c$ を満たすから

$$1 + a < 1 + b < a + b < a + c < b + c$$

4個の整数 $1, a, b, c$ から2個取り出してできる和は、少なくとも5通りある。
また、4個の整数 $1, a, b, c$ から2個取り出す組合せは ${}_4C_2 = 6$ 通りであるから、4個の整数 $1, a, b, c$ から2個取り出してできる和は、高々6通りである。

(i) 4個の整数 $1, a, b, c$ から2個取り出してできる和が5通りであるとき

$$(b + c) - (1 + a) + 1 = 5 \quad \text{ゆえに} \quad a = b + c - 5$$

これを $1 < a < b < c$ に代入すると

$$1 < b + c - 5 < b < c \quad \text{ゆえに} \quad 6 < b + c, \quad c < 5, \quad b < c$$

これを満たすのは $b = 3, c = 4$ ゆえに $a = 2$

(ii) 4個の整数 $1, a, b, c$ から2個取り出してできる和が6通りであるとき

$$(b + c) - (1 + a) + 1 = 6 \quad \text{ゆえに} \quad a = b + c - 6$$

これを $1 < a < b < c$ に代入すると

$$1 < b + c - 6 < b < c \quad \text{ゆえに} \quad 7 < b + c, \quad c < 6, \quad b < c$$

これを満たすのは $(b, c) = (3, 5), (4, 5)$

したがって $(a, b, c) = (2, 3, 5), (3, 4, 5)$

これらは、確かに (ii) を満たす。

(i), (ii) より $(a, b, c) = (2, 3, 4), (2, 3, 5), (3, 4, 5)$ ■