

平成 13 年度 京都大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 120 分
総合人間 (文系), 文, 教育 (文系), 法, 経済 (文系)

問題 1 2 3 4 5

1 未知数 x に関する方程式

$$x^4 - x^3 + x^2 - (a + 2)x - a - 3 = 0$$

が, 虚軸上の複素数を解に持つような実数 a をすべて求めよ.

2 xy 平面内の相異なる 4 点 P_1, P_2, P_3, P_4 とベクトル $\vec{v}$ に対し, $k \neq m$ のとき, $\overrightarrow{P_k P_m} \cdot \vec{v} \neq 0$ が成り立っているとする. このとき, k と異なるすべての m に対し

$$\overrightarrow{P_k P_m} \cdot \vec{v} < 0$$

が成り立つような点 P_k が存在することを示せ.

3 任意の整数 n に対し, $n^9 - n^3$ は 9 で割り切れることを示せ.

4 n を 2 以上の整数とする. 実数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ に対し,

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

とおく. $k = 1, 2, \dots, n$ について, 不等式 $-1 < S - a_k < 1$ が成り立っているとする.

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$$

のとき, すべての k について $|a_k| < 2$ が成り立つことを示せ.

5 xy 平面内の $-1 \leq y \leq 1$ で定められる領域 D と, 中心が P で原点 O を通る円 C を考える. C が D に含まれるという条件のもとで, P が動きうる範囲を図示し, その面積を求めよ.

解答例

1 虚軸上の解を $x = ki$ とおくと (k は実数)

$$\begin{aligned} k^4 + k^3i - k^2 - (a+2)ki - a - 3 &= 0 \\ k^4 - k^2 - a - 3 + k\{k^2 - (a+2)\}i &= 0 \end{aligned}$$

したがって
$$\begin{cases} k^4 - k^2 - a - 3 = 0 & \cdots \textcircled{1} \\ k(k^2 - a - 2) = 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{2}$ から $k = 0$ または $k^2 - a - 2 = 0$

$k = 0$ を $\textcircled{1}$ に代入して $a = -3$

$k^2 - a - 2 = 0$ と $\textcircled{1}$ から a を消去すると

$$k^4 - 2k^2 - 1 = 0 \quad k^2 > 0 \text{ に注意して } k^2 = 1 + \sqrt{2}$$

これを $k^2 - a - 2 = 0$ に代入すると

$$1 + \sqrt{2} - a - 2 = 0 \quad \text{ゆえに } a = \sqrt{2} - 1$$

よって $a = -3, \sqrt{2} - 1$



- 2 原点 O を基準とする各点 P_1, P_2, P_3, P_4 の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4$ とする.

このとき, 問題文の条件にある内積は次のように変形できる.

$$\overrightarrow{P_k P_m} \cdot \vec{v} = (\vec{p}_m - \vec{p}_k) \cdot \vec{v} = \vec{p}_m \cdot \vec{v} - \vec{p}_k \cdot \vec{v}$$

ここで, 各点 P_i ($i = 1, 2, 3, 4$) に対して, 実数 t_i を次のように定義する.

$$t_i = \vec{p}_i \cdot \vec{v}$$

問題の条件「 $k \neq m$ のとき $\overrightarrow{P_k P_m} \cdot \vec{v} \neq 0$ 」より,

$$t_m - t_k \neq 0 \quad \text{すなわち} \quad t_k \neq t_m$$

が成り立つ. したがって, 4つの実数 t_1, t_2, t_3, t_4 はすべて相異なる.

相異なる有限個の実数の中には, 必ずただ1つの最大値が存在する. t_1, t_2, t_3, t_4 の中で値が最大となるものを t_k とおくと, この k と異なるすべての m について, 次の不等式が成り立つ.

$$t_k > t_m \quad \text{すなわち} \quad t_m - t_k < 0$$

このとき,

$$\overrightarrow{P_k P_m} \cdot \vec{v} = \vec{p}_m \cdot \vec{v} - \vec{p}_k \cdot \vec{v} = t_m - t_k < 0$$

となる.

以上より, k と異なるすべての m に対し $\overrightarrow{P_k P_m} \cdot \vec{v} < 0$ が成り立つような点 P_k (内積 $\vec{p}_i \cdot \vec{v}$ を最大にする点) は必ず存在する.



3 (*) $n^9 - n^3 = n^3(n^6 - 1) = n^3(n^3 + 1)(n^3 - 1)$

(i) $n = 3k$ (k は整数) のとき, $n^3 = (3k)^3 = 9 \cdot 3k^3$ より,

(*) は 9 の倍数である.

(ii) $n = 3k + 1$ (k は整数) のとき

$$\begin{aligned} n^3 - 1 &= (3k + 1)^3 - 1 = 27k^3 + 27k^2 + 9k \\ &= 9k(3k^2 + 3k + 1) \end{aligned}$$

ゆえに, (*) は 9 の倍数である.

(iii) $n = 3k - 1$ (k は整数) のとき

$$\begin{aligned} n^3 + 1 &= (3k - 1)^3 + 1 = 27k^3 - 27k^2 + 9k \\ &= 9k(3k^2 - 3k + 1) \end{aligned}$$

ゆえに, (*) は 9 の倍数である.

(i)~(iii) より, $n^9 - n^3$ は 9 の倍数である. ■

4 (*) $-1 < S - a_k < 1$ より, $S - 1 < a_k < S + 1$ であるから

$$\sum_{k=1}^n (S - 1) < \sum_{k=1}^n a_k < \sum_{k=1}^n (S + 1)$$

$$n(S - 1) < S < n(S + 1)$$

$$n \geq 2 \text{ であるから } -1 - \frac{1}{n-1} < S < 1 + \frac{1}{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad -2 < S < 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(*) について, $k = 1, n$ のとき

$$-1 < S - a_1 < 1, \quad -1 < S - a_n < 1$$

$$\text{上の 2 式から} \quad a_n - a_1 < 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

(i) $a_1 \leq -2$ と仮定すると, $\textcircled{2}$ から $a_n < 0$

$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n < 0$ であるから

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n < a_1 \leq -2$$

これは $\textcircled{1}$ に反し, 矛盾.

(ii) $a_n \geq 2$ と仮定すると, $\textcircled{2}$ から $a_1 > 0$

$0 < a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ であるから

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n > a_n \geq 2$$

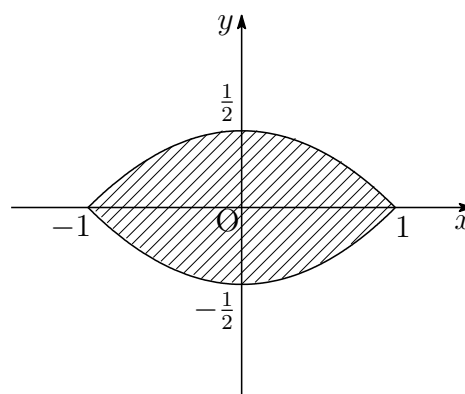
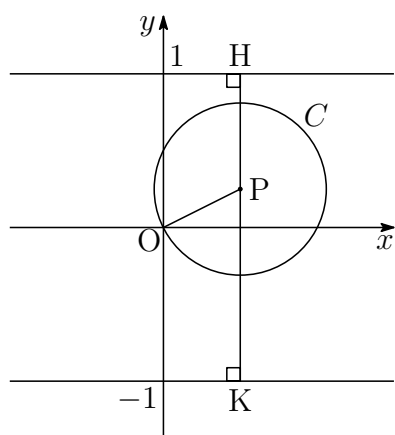
これは $\textcircled{1}$ に反し, 矛盾.

(i), (ii) より $-2 < a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n < 2$

よって, すべての k ($k = 1, 2, \dots, n$) について $|a_k| < 2$ ■

5 $P(x, y)$, $H(x, 1)$, $K(x, -1)$ とおくと, 満たす条件は, 下の図について

$$-1 \leq y \leq 1, \quad OP \leq PH, \quad OP \leq PK$$



したがって $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 - y \\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq y + 1 \end{cases}$ すなわち $\begin{cases} y \leq \frac{1}{2}(1 - x^2) \\ y \geq \frac{1}{2}(x^2 - 1) \end{cases}$

P が動く範囲は右上の図の斜線部分で, その面積を S とすると, 対称性により

$$S = 2 \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1 - x^2) dx = \int_{-1}^1 (1 + x)(1 - x) dx = \frac{1}{6} \cdot 2^3 = \frac{4}{3}$$

■